AELTERE UND NEUERE METHODEN

lineare

# DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

durch

EINFACHE BESTIMMTE INTEGRALE

aufzulösen.

---

Eine Zurückweisung der dieses Thema betreffenden Prätensionen des

HERRN PROF. SIMON SPITZER IN WIEN

nebst einer kritischen Beleuchtung der vermeintlichen Entdeckungen desselben.

Von

Dr. ANTON WINCKLER

k. k. Professor.

---

WIEN, 1879.

ALFRED HÖLDER

K. K. HOF- UND UNIVERSITÄTS-BUCHHÄNDLER

I. Rothenthurmstrasse 15.



# AELTERE UND NEUERE METHODEN

lineare

# DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

durch

## EINFACHE BESTIMMTE INTEGRALE

aufzulösen.

---

Eine Zurückweisung der dieses Thema betreffenden Prätensionen des

HERRN PROF. SIMON SPITZER IN WIEN

nebst einer kritischen Beleuchtung der vermeintlichen Entdeckungen desselben.

Von

DR. ANTON WINCKLER

k. k. Professor.

---

WIEN, 1879.

ALFRED HÖLDER

K. K. HOF- UND UNIVERSITÄTS-BUCHHÄNDLER

I. Rothenthurmstrasse 15.

# VORWORT.

Die vorliegende Schrift steht in genauem Zusammenhang mit drei vor längerer Zeit erschienenen Abhandlungen, deren Resultate hier im weitern Verlauf ausführlich angegeben und besprochen werden sollen, welche aber im Uebrigen nicht als bekannt vorausgesetzt zu werden brauchen. Der leichtern Uebersicht wegen glaube ich allem Andern die Fragen, mit welchen sich jene Arbeiten beschäftigen und die Gründe, welche mich zu deren Veröffentlichung bestimmt haben, voranschicken zu sollen.

Jene am 30. Jänner 1873, 7. Jänner 1875 und 12. April 1877 der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien vorgelegten, im 67., 71. und 75. Bande ihrer Sitzungsberichte erschienenen Abhandlungen sind betitelt:

A. „Integration der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Coëfficienten lineare Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind."

B. „Integration zweier linearen Differentialgleichungen."

C. „Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung."

Ich setzte mir darin die ganz bestimmte Aufgabe, die beiden Gleichungen:

$$(H_0 t + H)\frac{d^2y}{dt^2} + 2(K_0 t + K)\frac{dy}{dt} + (L_0 t + L)y = 0 \quad . \; . \; . \; (1)$$

$$(H_0 t^2 + 2H_1 t + H_2)\frac{d^2y}{dt^2} + (K_0 t + K_1)\frac{dy}{dt} + L_0 y = 0 \quad . \; . \; . \; (2)$$

und zwar die letztere für den Fall, dass der Coëfficient von $\frac{d^2y}{dt^2}$ ein vollständiges Quadrat ist, sowie auch die Riccati'sche

Differentialgleichung in voller Allgemeinheit für alle reellen und complexen Werthe der constanten Coëfficienten und der Veränderlichen $t$, sodann mit Ausschluss jeder andern Form und jeder weitern infinitesimalen Operation, lediglich durch einfache bestimmte Integrale (Quadraturen) zu integriren.

Diese ausschliesslichen Bedingungen stellte ich mir aus mehreren Gründen, insbesondere auch, um zu zeigen, dass sie in der That erfüllbar sind, während die bisher bekannten Lösungen aus bestimmten Integralen, aus höheren Differentialquotienten solcher Integrale und anderer Functionen, dann wieder aus 2-, 3-, 4-fachen Integralen oder unendlichen Reihen bestehen, daher die Aufgabe weder in der einen noch der andern dieser verschiedenen Formen in allen Fällen erledigen, auch nicht selten für die Anwendung, beziehungsweise Discussion untauglich sind.

Die unmittelbare Veranlassung, mir gerade die vorhin bezeichnete Aufgabe zu stellen und die erwähnten Abhandlungen zu veröffentlichen, war eine Arbeit über bestimmte Integrale, bei welcher ich auf eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2y}{dt^2} + at^n \cdot \frac{dy}{dt} + bt^{n-1}\, y = 0 \qquad \ldots (3)$$

geführt wurde, die für $at^{n+1} = (n+1)x$ in die einfachere

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \left(x + \frac{a}{n+1}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{b}{a(n+1)} \cdot y = 0 \qquad \ldots (4)$$

übergeht und also einem speciellen Fall von (1) entspricht. Ich suchte vergeblich in allen mir zugänglichen Werken und Abhandlungen nach particulären Lösungen von (4), mittelst welcher in allen Fällen sich das allgemeine Integral dieser Gleichung in der vorhin bezeichneten reinen Form von Quadraturen, wie ich deren für jene Arbeit bedurfte, herstellen liesse. In den 1860 erschienenen „Studien" des Herrn Prof. Spitzer, auf welche ich zuletzt gerieth, fand ich die erwähnten Lösungen wieder, aber was ich suchte, ebensowenig, als selbst nur die Aufstellung meines Problems überhaupt.

Nicht einmal für specielle Werthe von $a$, $b$, $n$ fand sich darin das gesuchte allgemeine Integral in Form von Quadraturen,

wohl aber S. 40 des 1. Abschnittes die Versicherung, Spitzer habe die Gleichungen von der Form (1) in allen Fällen befriedigend integrirt. Dass derselbe an diese allgemeine Befriedigung selbst nicht glauben konnte, ergab sich, als ich später im 53. Theil des Archivs von Grunert (1872) wieder von einer Abhandlung Spitzer's Kenntniss erhielt, betitelt: „Integration der Gleichung $y'' = x(xy' - my)$ für den Fall, wo $m$ eine ganze positive Zahl ist", welche in der 1874 erschienenen Fortsetzung der „Studien" S. 84—89 nochmals abgedruckt ist. Obgleich derselbe 11 Jahre früher die ganz allgemeine Gleichung (1) in allen Fällen und in befriedigender Weise integrirt zu haben vorgab, so machte er doch jetzt nicht einmal den Versuch, jene specielle Gleichung, die er, $x^3 = \xi$ setzend, in

$$\xi \cdot \frac{d^2y}{d\xi^2} + \frac{2 - \xi}{3} \cdot \frac{dy}{d\xi} + \frac{m}{9} \cdot y = 0$$

transformirt, und welche den Werthen $n = 2$, $a = -1$, $b = m$ in der Gleichung (3) entspricht, anders als für ganze, positive Werthe von $m$ zu integriren — und wie integriren? Etwa nach neuen, noch „befriedigenderen", die Resultate in einfacheren Formen darstellenden, oder das ganze Verfahren abkürzenden, allgemeinen Methoden, die 1860 noch nicht bekannt waren, oder etwa gar in Form einfacher bestimmter Integrale? Nein; von Allem das Gegentheil, — blos für die ganzen Zahlen $m = 3, 6, 9, 12, \ldots$ und $m = 1, 4, 7, 10, \ldots$ mittelst höherer Differentialquotienten und Reihenentwicklung, sodann für $m = 2$ nach einer drei Seiten langen Rechnung durch drei Doppelintegrale, und zwar nach einer Methode von Kummer (welcher meines Wissens zuerst, und zwar schon im Jahre 1839 die Integration derartiger Gleichungen durch vielfache Integrale gezeigt hat), wieder mit der Versicherung: „auf ganz gleiche Art lassen sich alle jene Gleichungen behandeln, wo $m$ den Werth 5, 8, 11, 14, ... hat". Von Formeln für die letztern Fälle aber findet sich ebensowenig eine Spur, als für jene, in welchen $m$ etwa ein positiver Bruch wäre, nicht zu gedenken, dass Spitzer auch nur für den Fall, dass $m$ eine ganze Zahl wäre, die particulären Integrale in Form einfacher Quadraturen anzugeben vermocht hätte.

Dies also war rücksichtlich des erwähnten speciellen Falles der Gleichung (1) der Stand der „Forschungen" Spitzer's noch

im Jahre 1874, ein Jahr später, als meine die Integration der allgemeinen Gleichung (1) betreffende Abhandlung (A) erschienen war.

Was über die Integration der allgemeinen Gleichung (1) mittelst blosser Quadraturen bei Spitzer zu finden ist, besteht in zwei von Petzval und Weiler aufgestellten speciellen Lösungen und einigen ebenfalls schon früher bekannten Integralen mit imaginären Grenzen, die, ohne jede Bezeichnung des Weges der Variabeln hingestellt, sinnlose Formen sind, von welchen später die Rede sein wird und auf welche u. A. die folgende, in der „Höhern Analysis" von Dr. Natani (Berlin 1866, S. 297) vorkommende, nichts weniger als schmeichelhafte Bemerkung zu beziehen ist: „Was speciell die Ausdrücke in Form bestimmter Integrale (als Lösungen von Differentialgleichungen) anbetrifft, so ist keineswegs die noch sehr naive Weise hinreichend, in welcher man sich heutzutage in Wien mit diesem Problem abfindet."

In die vorliegende Schrift*) habe ich, ihrem Titel entsprechend, ausser den Resultaten der Abhandlungen (A) und (B) auch diejenigen der Abhandlung (C) in übersichtlicher Zusammenstellung aufgenommen, durch welche die Auflösung des oben erwähnten Problems an Einfachheit wesentlich gewonnen hat und welche, wie ich glaube, schon darum von Interesse sind, dass sie auf einen allgemeinen Satz sich stützen, wonach die Integration der Gleichung (1) methodisch ganz ebenso von statten geht, wie Jacobi („Werke" III. S. 97) den Fall, in welchem die Gleichung (2) der hypergeometrischen Reihe angehört, ausschliesslich durch einfache bestimmte Integrale allgemein erledigt hat.

---

*) Sie ist eine nach jeder Richtung erweiterte, im Einzelnen ausführlichere Bearbeitung der von mir im Jahre 1876 veröffentlichten Schrift: Ueber die Integration linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mittelst einfacher Quadraturen.

# I. Angriffe des Prof. S. Spitzer und deren Zurückweisung.

## 1.

Möge nun der geehrte Leser vernehmen, durch welches indignirende Erlebniss ich die vorliegende Schrift zu verfassen und drucken zu lassen veranlasst worden bin. Der Prof. S. Spitzer hat sich durch die volle Kenntniss der vorhin bezeichneten Sachlage und des ganzen Inhaltes meiner erwähnten Abhandlungen (A) und (B) nicht abhalten lassen, am 20. Jänner 1876 in der Wiener alten „Presse" ein an die kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien adressirtes Schreiben zu veröffentlichen, worin Folgendes zu lesen ist:

„Vor Kurzem kamen mir die letzten Jahrgänge der Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu, worin sich zwei Abhandlungen über Integration linearer Differentialgleichungen befinden, die am 30. Jänner 1873 und am 7. Jänner 1875 der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften von Dr. A. Winkler vorgelegt wurden.

Natürlich interessirten mich diese Arbeiten. Wie war ich aber überrascht und betroffen, als ich fand, dass Professor Winkler die Resultate meiner Arbeiten vom Jahre 1860 (1. Abschnitt) und 1861 (3. Abschnitt) wiedergegeben, ohne denselben auch nur das geringste nennenswerthe Neue zuzufügen und es nicht verschmähte, diese Arbeit als das Ergebniss seiner Studien der Akademie der Wissenschaften vorzulegen.

Lange Jahre habe ich mich mit dem Studium der Integration linearer Differentialgleichungen geplagt. Zahllose Nächte habe ich geopfert und über den Gegenstand nachgedacht und habe mich glücklich gefühlt, wenn ich einen und den andern

Satz gefunden, und wenn dann hie und da von einer Seite meinen Arbeiten Anerkennung gezollt wurde, so fand ich hierin meinen schönsten Lohn.

Nun hat ein wirkliches Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften sich mein geistiges Eigenthum angeeignet. So wende ich mich denn hiemit an die kaiserliche Akademie der Wissenschaften, deren Aufgabe es ist, wissenschaftliche Bestrebungen auch von Nichtmitgliedern in Schutz zu nehmen, mit der ehrfurchtsvollen Bitte, meine geistigen Arbeiten zu schützen und nicht zuzugeben, dass dieselben unter fremdem Namen in ihren Schriften abgedruckt erscheinen.

Indem ich bitte, von dieser meiner Verwahrung Act zu nehmen, wolle das hohe Präsidium zur Constatirung meiner Angaben das Geeignete veranlassen und die Resultate dieser Erhebung in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften veröffentlichen, damit das mathematische Publicum von dem Sachverhalte in Kenntniss gesetzt werde."

Unverkennbar darauf berechnet, einen ausgiebigen Zeitungsscandal nebst Reclame zu veranstalten, das Lesepublicum, welches in seiner weitaus überwiegenden Mehrheit solchen Fragen fern steht, mittelst kecker Behauptungen zu captiviren, und Spitzer wieder einmal im Schein eines „Märtyrers", dem jetzt das „geistige Eigenthum" gestohlen wurde, erglänzen zu lassen, hat dieses Pasquill durch die Veröffentlichung in einer politischen Zeitung auch den andern, sehr würdigen Zweck erreicht, dass mir die Vertheidigung durch eine unverweilte sachliche Widerlegung der schmählichen Anklagen unmöglich gemacht wurde.

Indessen liess ich nothgedrungen doch eine Erwiderung folgenden Inhaltes in Nr. 22 der „Presse" einrücken:

„In einem an den Präsidenten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften adressirten Schreiben, welches Professor Spitzer in Nr. 20 der „Presse" der Oeffentlichkeit übergeben hat, werde ich geradezu eines an diesem Herrn verübten literarischen Diebstahls bezichtigt, ohne dass derselbe für diese Beschuldigung auch nur den geringsten Beweis beigebracht hätte. Indem ich mir alle weiteren Schritte vorbehalte, möge Folgendes zur vorläufigen Orientirung des Publicums dienen:

1. In meinen der kaiserlichen Akademie am 30. Jänner 1873 und 7. Jänner 1875 vorgelegten Abhandlungen stellte ich mir die früher von Anderen kaum versuchte, geschweige denn vollständig gelöste Aufgabe, gewisse Differentialgleichungen in allen Fällen und mit Aussschluss jeder andern Form blos durch sogenannte Quadraturen zu integriren. Dieses Problem ist in meinen erwähnten Abhandlungen vollständig gelöst; meine Lösungen (sie sind insgesammt mit römischen Ziffern bezeichnet) erstrecken sich auf alle denkbaren Fälle und sind durchaus neu. Nicht eine derselben kommt im ersten und dritten Abschnitt der 1860 und 1861 erschienenen „Studien" des Professors Spitzer vor. Es ist daher unwahr, wenn Letzterer in seinem Schreiben sagt, „ich hätte die Resultate seiner Arbeiten wiedergegeben, ohne denselben auch nur das geringste Neue hinzuzufügen".

2. Die von früheren Mathematikern gefundenen, in den meisten Fällen unvollständigen, in anderen geradezu unbrauchbaren, in allen Fällen aber weniger allgemeinen Lösungen sind in meinen beiden Arbeiten nur nebenbei und blos der Vergleichung wegen aufgeführt, aber auf das sorgfältigste in jedem einzelnen Falle ausdrücklich als bereits bekannt bezeichnet, so dass auch der leiseste Vorwurf von mir fern bleiben muss, als wollte ich irgend etwas von Anderen Gefundenes mir selbst zueignen. Es ist daher wieder unwahr, wenn Professor Spitzer in seinem Schreiben die Behauptung aufstellt, „ich hätte es nicht verschmäht, mir fremdes geistiges Eigenthum anzueignen und unter meinem Namen in den Schriften der Akademie abdrucken zu lassen".

3. Die in den „Studien" Seite 8, 32, 35, 38 und 40 des ersten Abschnittes abgedruckten Formeln sind die einzigen, welche auf das mir gestellte Problem bezogen werden können. Sie umfassen aber nicht einmal alle schon früher bekannt gewesenen Lösungen dieses Problems; aber auch jene wenigen sind nicht von Simon Spitzer, sondern von Mathematikern, und zwar von Euler, Poisson, Moigno, Petzval, Weiler etc. gefunden worden, aus deren Schriften sie Jener mit ganz unwesentlichen Abänderungen, mit anderen Buchstaben etc. in die „Studien" herübergenommen, zuweilen aber auch buchstäblich abgeschrieben hat, ohne anzugeben, dass und in

welchem Werke er sie „erforscht" oder „gefunden" hat. Die „Studien" Spitzer's sind daher bezüglich des von mir behandelten Problems eine blosse Compilation fremder Arbeiten, ohne jeden selbstständigen Werth und es ist über alle Massen un—qualificirbar, wenn Spitzer in seinem Schreiben das den genannten Mathematikern entnommene Material seiner „Studien" sein „geistiges Eigenthum" nennt.

Die Jeremiade jenes Herrn über „zahllose geopferte Nächte" erweckt ein Mitleid, das ich theile; denn wer zahllose Nächte opfern, ja sogar vieles „Nachdenken" darauf verwenden musste, um fünf Formeln anderen Werken zu entnehmen, in etwas andere Gestalt zu bringen, dann seinen „Studien" einzuverleiben, der verdient wahrlich alles Mitleid.

Alles hier Angeführte und noch mehreres Andere ist der Gegenstand eines einlässlichen, druckfertig vor mir liegenden Nachweises*), worin Spitzer, vielleicht öfter, als es ihm lieb sein wird, „genannt" ist.

4. Da Spitzer den Beweis der Wahrheit für seine verleumderischen Behauptungen schuldig geblieben ist, so biete ich ihm Gelegenheit, denselben wenigstens theilweise dadurch nachzuliefern, dass er von der sehr einfachen Differentialgleichung

$$12xy'' + (7 - 12x)y' + 800y = 0$$

zwei verschiedene Lösungen, jedoch ausschliesslich in Form von (endlichen) Quadraturen, und zwar unmittelbar nach zwei in den „Studien" wirklich stehenden Formeln (nicht nach anderen!) berechnet, die erweislich Simon Spitzer's „geistiges Eigenthum" sind. Damit Spitzer an dem vollen Ernst dieser Aufforderung nicht zweifeln kann, wird beigefügt, dass ich selbst die beiden Lösungen aus der ersten meiner Abhandlungen bereits berechnet habe. Ich fordere ihn auf, die bezeichneten Lösungen binnen vier Tagen in der „Presse" zu veröffentlichen; ausweichende Redensarten nehme ich nicht an und Nichtwollen wird nicht blos von mir als Nichtkönnen, dann aber auch das ganze in Nr. 20 der „Presse" publicirte Schreiben als das erklärt werden, was es ist."

---

*) Er liegt beträchtlich vervollständigt hier vor.

Ob Spitzer diese Antwort erwartet, und wer, hinter ihm stehend, ihn schnell darüber belehrt hat, dass er auf solche Art das „Geschäft" nicht machen werde, dass er also jetzt die Veröffentlichung seines Briefes, der im Publicum einen ganz andern als den beabsichtigten Eindruck gemacht, mir zu imputiren suchen müsse etc., dies Alles ist hier ziemlich gleichgiltig; ich hebe nur die Thatsache hervor, dass Spitzer schon zwei Tage nach Erscheinen des Briefes in der „Presse" erklärte: „Nicht auf offenem Markte wollte ich einen wissenschaftlichen Streit vor Laien zur Entscheidung bringen", — wie denn Spitzer selbst durch sein Schreiben es versucht hat, — „ich werde wohl in einer eingehenden Arbeit den Beweis meiner Anklage führen, und erhoffe mir in Folge dieser, dass Sie, Herr Professor, in den Annalen der Mathematik, — wenn auch wirkliches Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften — als das gelten werden, was Sie wirklich sind"; — dass er zu einer würdevollen Höhe mit den Worten sich erhob: „Laut schreien Sie, unwahr, unwahr, Alles unwahr! und nur Spitzer hat Alles abgeschrieben und werfen sich zum Schiedsrichter (?) Ihrer eigenen Sache auf!" — dann aber eine tapfere Schwenkung mit folgenden nicht minder erhabenen Worten vollzog: „Ich entsage jeder weitern Polemik in den Tagesjournalen (ganz plötzlich!). In den Fachjournalen begegnen wir uns wieder (wo?), Zanken und Raufen auf offener Strasse schickt sich nicht, ich wollte, wie mein Vorgehen von Anfang beweist,*) es vermieden haben (sic!) und bot Ihnen Zeit genug, einen Strassenkampf zu vermeiden."**)

Hiezu einige Bemerkungen. Um den vom k. k. Professor Spitzer geplanten Pressscandal, wenn irgend möglich zu vermeiden, habe ich, über die von Spitzer lange vor Veröffentlichung seines Schreibebriefes als „Richter in eigener Sache" verübten Schimpfreden im Hinblick auf dessen Persönlichkeit hinwegsehend, schon am 19. December 1875 das Präsidium der

*) Dieses Vorgehen kennt der Leser bereits und wird es bald noch näher kennen lernen.

**) Zur Beruhigung auswärtiger Leser glaube ich doch bemerken zu müssen, dass meinerseits ein „Strassenkampf", ein „Raufen" u. dgl. mit Spitzer nicht stattfand. Odi profanum vulgus et arceo.

kaiserlichen Akademie um die Einholung einer fachmännischen Aeusserung ersucht. Möge u. A. auch die über diesen Punkt in der „Presse" veröffentlichte Erklärung hier folgen:

„Wenn amtlich mein Ansuchen keinen Erfolg hatte und auch von dem Schreiben Spitzer's in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe keine Notiz genommen wurde, so mochte dies seinen Grund darin haben, dass jener Brief lediglich Denunciationen enthält und der Schreiber desselben, uneingedenk der Regel, dass dem Ankläger die Beweispflicht obliegt, es weder der Mühe werth, noch als durch den Anstand geboten erachtete, Beweise für seine Behauptungen beizubringen, sondern keck das Ansinnen stellte, die Akademie solle diese oder jene von Spitzer beliebten Klagen untersuchen oder untersuchen lassen — ob sie vielleicht begründet sind oder nicht.

Vielleicht aber tauchte auch die Erinnerung wieder auf, dass Spitzer genau in demselben Capitel über Differentialgleichungen vor 18 Jahren seinen Lehrer, den Herrn Professor Petzval, durch welchen er in dieser Theorie zuerst unterrichtet wurde, aus ganz besonderer Dankbarkeit ebenso des literarischen Diebstahls bezichtigte, wie dies jetzt von diesem würdigen Collegen mir geschehen ist.

Noch ein Wort über die Art, wie sich Spitzer von meiner Aufforderung loszumachen suchte, die in Nr. 22 der „Presse" aufgestellte Differentialgleichung „ausschliesslich in Form von Quadraturen nach zwei in den „Studien" wirklich stehenden Formeln, die erweislich Spitzer's „geistiges Eigenthum" sind, zu integriren und die Lösungen in der „Presse" zu veröffentlichen." . . . Mit vollendeter Dreistigkeit schreibt er, „ich fände diese Aufgabe in §. 14 des ersten Abschnittes der „Studien" ohnehin schon gelöst". Nun möge der geehrte Leser wissen, dass im §. 14 gar keine Formel vorkommt, die eine Quadratur ist, und dass in jenem eine halbe Seite umfassenden Paragraphen gar nicht einmal eine Methode beschrieben ist, die auf eine Quadratur führen könnte! Darum hat Spitzer „seine Lösung" zu veröffentlichen unterlassen; er hat die Aufgabe, wie jeder Leser sich leicht überzeugen kann, nicht beantwortet, und konnte sie nicht beantworten, wie ich zum Voraus gewusst habe. Sapienti sat! —"

Nach Veröffentlichung meiner letzten Erklärung verflossen mehr als sechs Monate, ohne dass Spitzer „in einer eingehenden Arbeit" den schuldigen und versprochenen Beweis irgendwo geliefert hätte.

Um den Versuch des Todtschweigens zu vereiteln, hauptsächlich aber, um meinen Fach- und Standesgenossen die zur Bildung eines eigenen, auf Thatsachen gestützten Urtheils nöthige vergleichende Zusammenstellung der betreffenden Materialien vorzulegen, habe ich, wie bereits bemerkt, im Jahre 1876 die oben erwähnte Schrift erscheinen lassen.

2.

Seit dieser Zeit verflossen wieder mehr als zwei Jahre, also deren fast drei, seit Spitzer den Scandal anfieng, aber den Beweis für seine anmasslichen Behauptungen immer noch schuldig blieb, ganz entsprechend seiner Methode „die sich mit einer solchen Kleinigkeit wie der Lieferung eines Beweises nicht abgibt". Gleichwohl mochte es Spitzer nach dem Erscheinen meiner erwähnten, ihn etwas zu hell beleuchtenden Schrift und der durch dieselbe veranlassten Prüfung seiner „Anklagen" in mathematischen Zeitschriften*) in seiner so würdigen Position ein wenig unheimlich geworden sein; er musste wohl oder übel denn doch mit der „eingehenden Arbeit" endlich einmal herausrücken. Etwas dergleichen hat er nun gethan. Er wärmt — zum wievieltenmale weiss ich nicht genau — das Gericht seiner „Studien" wieder auf, affectirt die Rolle des angegriffenen Theils und schreibt am Schluss der Vorrede: „Ich könnte nun schliessen, mir obliegt (sic) aber nun noch die peinliche (!) Aufgabe, die Angriffe zurückzuweisen, die in den letzten Jahren von zwei Seiten gegen meine Arbeiten gerichtet wurden. Ich werde auf diese Angriffe nicht hier, noch in jenem Theil meiner Arbeiten antworten, welcher wissenschaftlichen Ausführungen gewidmet ist, denn die — gelinde gesagt — crasse Unwissenschaftlichkeit dieser Angriffe gestattet nicht, bei einer strengwissenschaftlichen Dar-

---

*) Siehe: Archiv für Mathematik und Physik von Hoppe. 60. Theil. Literar. Bericht. S. 40 und

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik von Ohrtmann, Müller und Wangerin. 8. Band., S. 190.

stellung auf dieselben zu reflectiren. Die verdiente Abfertigung mögen sie im Anhange finden, auf welchen ich hiemit verweise."

Spitzer steht vor der Aufgabe, seine verleumderischen Behauptungen, welche auszusprengen ihm so leicht fiel, streng und erschöpfend zu beweisen; darauf aber „reflectirt" er nicht, weil dies — „peinlich" ist. Indessen eine blosse „Abfertigung", die ja nicht „strengwissenschaftlich" zu sein braucht, thut es anstatt der „eingehenden Arbeit" — in den „Annalen der Mathematik" wohl auch, zumal der Muth gewaltig imponirt, mit dem Spitzer dreimal wiederholt seine „Anklagen aufrecht erhält", und mit dem er im „Anhang" jede Hindeutung auf den schuldigen und versprochenen Beweis ängstlich vermeidet. Dann aber ist das calumniare audacter... ein bewährter Spruch, und um eine neue Serie von Schimpfworten ist Spitzer nicht verlegen; von ausgezeichneter Wirkung ist es z. B. wo Spitzer sagt: „Winckler ist das Rechtsgefühl, das Gefühl für Mein und Dein abhanden gekommen", — „er hat meine „Studien" geplündert" — „das geistige Eigenthum (particuläre Integrale) mir entwendet"; von vorzüglichem Effect sind auch seine Reminiscenzen an den „Schwindel" und die geflügelten Worte, wo er von „Enten mit vier Füssen" spricht und mir vorwirft, ich „schmücke mich mit fremden" — nämlich Spitzer'schen — „Federn" — wovor mich aber der Himmel bewahren möge!

Aus diesen beweiskräftigen, eines „Hochschulprofessors" besonders würdigen Leistungen des Spitzer'schen Pamphlets möge der Leser vorläufig entnehmen, mit wem ich es hier zu thun habe, und es begreiflich finden, wenn ich, ohne der „Methode" Spitzer's zu folgen, die verleumderischen Ausstreuungen nach Verdienst züchtige.

Ich werde in dieser Schrift alle in den Punkten 1, 2, 3 und 4 meiner Erklärung in der „Presse" aufgestellten Behauptungen (Art. 1) streng, in geordneter Darstellung und in allen Einzelnheiten beweisen und zeigen, dass Spitzer in seinem „Anhang" den versprochenen Beweis völlig schuldig geblieben ist, ja denselben nicht einmal versucht, geschweige denn die von mir früher gelieferte Widerlegung seiner Prätensionen im Mindesten entkräftet hat. Dies geschieht, nicht weil mir irgend etwas daran läge, ob Spitzer „seine Anklage auch fernerhin aufrecht erhält",

ob er noch weiter fortschimpft, oder ob ich befürchtete, sein Schreiben an die Akademie oder sein „Anhang" könne in den Augen wissenschaftlich zurechnungsfähiger Männer irgend welche Beachtung finden, oder gar, als hätte ich Spitzer gegenüber „meine Ehre wieder herzustellen" („Anhang", S. 180); es geschieht vielmehr, damit Spitzer, welcher eine Lehrkanzel an der grössten technischen Hochschule Oesterreichs einnimmt, den zahlreichen Fachgenossen, sowie allen Denjenigen, welche den Herrn noch nicht hinlänglich kennen aber kennen sollten, „als das erscheine, was er wirklich ist."

Hiezu noch einige Bemerkungen. Wenn im Nachstehenden Werke oder Abhandlungen citirt werden, welche vor den „Studien" Spitzer's erschienen sind, so soll damit nicht behauptet werden, es komme den betreffenden Autoren auf die in Rede stehenden Resultate auch die, nicht immer leicht festzustellende Priorität zu, sondern es wird damit nur das bewiesen, um was es sich hier allein handelt, dass Spitzer auf jene Priorität keinen Anspruch hat.

Was sodann rücksichtlich der Integration der Gleichung (1) die Anordnung im Allgemeinen, zunächst also die durch das Problem bedingte und auch von mir befolgte Unterscheidung der drei Fälle betrifft, ob die Veränderliche $t$ in allen, oder blos im zweiten und dritten, oder endlich blos im dritten Coëfficienten vorkommt, so ist dieselbe schon von Petzval im I. Band seines Werkes: „Integration der linearen Differentialgleichungen", Wien 1851, in den §§. 2 und 3, Gleichungen (31), (32) und (78) getroffen worden und rührt also nicht von Spitzer her.

Was ferner die diesen drei Fällen und ihren Unterabtheilungen entsprechenden Differentialausdrücke betrifft, durch deren Integration zwischen bestimmten Grenzen die particulären Integrale von (1) in den „Studien" genau ebenso wie in allen älteren Schriften darzustellen gesucht werden, so sind dieselben, wie in meinen beiden Aufsätzen (A) und (B) ausführlich gezeigt ist — von Spitzer aber nirgends gezeigt wurde — insgesammt nichts Anderes als specielle Fälle der Formeln des Art. 1040 der Instit. calc. integr. (Petrop. 1768) von Euler und weder von Laplace noch von späteren Mathematikern irgendwie vervoll-

ständigt worden. Es ist übrigens nicht blos bei der Gleichung (1), sondern überhaupt ein grober Anachronismus, wenn in den „Studien" die Methode, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch Quadraturen zu integriren, Laplace statt Euler zugeschrieben wird. Als Methode kann nur die auf alle jene Gleichungen sich beziehende Betrachtung angesehen werden, welche Euler a. a. O. Cap. X: „De constructione aequationum differentio-differentialium per quadraturas curvarum" geliefert, nicht aber Dasjenige, was Laplace 15 Jahre später in der „Histoire de l'Acad. des Sciences" (Paris 1785) in der Abhandlung „Mémoire sur les approximations des Formules qui sont fonctions de très-grands nombres" für die Integration einer linearen Differentialgleichung mit blos linearen Coëfficienten, unter Voraussetzung der Euler'schen Form des Integrals, ausdrücklich nur als un exemple très-générale bezeichnet hat. Wenn nun Spitzer nicht der ältern und allgemeinen Grundlegung Euler's, sondern diesem jüngern exemple den Charakter einer Methode verleiht, so entspricht dies zwar ganz seinen aparten Begriffen von Methode und „geistigem Eigenthum", aber es darf doch auch, um gerecht zu sein, der für Euler's Nachruf sehr wichtige Umstand nicht verschwiegen werden, dass ihm Spitzer im „Anhang" das Prädicat „berühmt" zuerkannt hat.

Will man nicht bis auf Euler zurückgehen und späteren Mathematikern zuschreiben, was aus den Euler'schen Formeln mit Leichtigkeit berechnet werden kann, so fällt, wie ich im Einzelnen nachweisen werde, doch nicht das Geringste für Spitzer ab.

3.

Ich beginne mit dem ersten der drei vorhin unterschiedenen Fälle der Gleichung (1). Kommt die unabhängige Veränderliche in allen Coëfficienten vor, wie in den „Studien" *) §§. 5—22 und im Art. 5 meiner Abhandlung (A) vorausgesetzt wird, so hat Petzval, Bd. I., §. 2, S. 38 u. ff. seines Werkes, die Gleichung (1) auf die Form

*) Statt „Studien" wird weiterhin der Kürze wegen meist blos „St." gesetzt werden.

$$xy'' + (a_1 x + b_1) y' + (a_0 x + b_0) y = 0 \qquad \ldots (5)$$

gebracht und gezeigt, dass eine particuläre Lösung ein bestimmtes Integral von der Form

$$\int_{u_0}^{u_1} e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \qquad \ldots (6)$$

ist, worin $\alpha$, $\beta$, $A$, $B$ gewisse, aus den Coëfficienten von (5) zu berechnende constante Werthe bezeichnen, auf welche es nur insoweit ankommt, als $A$ und $B$ selbst, oder doch deren reelle Theile positiv sein müssen, damit jenes Integral für $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ einen endlichen Werth erhält und

$$\Big[ e^{ux} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \Big]_{u_0}^{u_1} = 0 \qquad \ldots (7)$$

wird. Unter diesen Voraussetzungen hat Petzval S. 44 sowohl für positive als negative Werthe von $x$, als particuläre Lösung von (5) das Integral

$$y_1 = \int_\alpha^\beta e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \qquad \ldots (8)$$

aufgestellt, welches sich auch im Art. 1036 der Instit. calc. integr. von Euler als Exemplum 3 unter der gleichbedeutenden Form

$$\int_0^a e^{mux} u^n (a-u)^\nu du$$

findet.

Für die Berechnung der Grössen $\alpha$, $\beta$, $A$, $B$ gibt Petzval S. 43 die folgende Vorschrift: $\alpha$, $\beta$ bezeichnen die Wurzeln der Gleichung:

$$u^2 + a_1 u + a_0 = 0,$$

es ist also:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\right], \quad \beta = \frac{1}{2}\left[-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\right] \ldots (9)$$

$A$, $B$ sind als Zähler von Partialbrüchen aus der Gleichung

$$\frac{b_1 u + b_0}{u^2 + a_1 u + a_0} = \frac{A}{u-\alpha} + \frac{B}{u-\beta}$$

zu berechnen.

Man erhält nach dieser Vorschrift:

$$A = \frac{\alpha b_1 + b_0}{\alpha - \beta} = \frac{b_1}{2} + \frac{2 b_0 - a_1 b_1}{2\sqrt{a_1^2 - 4 a_0}}$$

$$B = \frac{\beta b_1 + b_0}{\beta - \alpha} = \frac{b_1}{2} - \frac{2 b_0 - a_1 b_1}{2\sqrt{a_1^2 - 4 a^0}} \qquad \ldots (10)$$

womit jene Grössen gefunden sind, also auch das erste particuläre Integral von (5) vollständig bestimmt ist.

Im Jahre 1858 hat Herr Weiler in Mannheim im Crelleschen Journal Bd. 55, S. 274 die folgende Bemerkung, durch welche das zweite Integral hergestellt wurde, veröffentlicht*):

„Schon Euler hat gezeigt, dass man der linearen Differentialgleichung:

$$xy'' + (a_1 x + b_1) y' + (a_0 x + b_0) y = 0 \qquad \ldots (5)$$

genüge durch die Form

$$y = \int_{u_0}^{u_1} e^{ux} . V du$$

wo $V$ eine Function von $u$ ist und die Integrationsgrenzen $u_0$ und $u_1$ von $x$ unabhängig sind. Nimmt man abkürzend

$$U_0 = b_1 u + b_0, \quad U_1 = u^2 + a_1 u + a_0$$

so findet man den Werth

$$V = \frac{1}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}$$

und die Integrationsgrenze $u_0$ und $u_1$ sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung $U_1 = 0$. Um das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung darzustellen, bedarf man zwei verschiedener besonderer Integrale.

Man findet ein zweites in der Form:

$$y = x^n \int_{u_0}^{u_1} e^{ux} . V du$$

*) Ich bediene mich der leichtern Uebersicht wegen der hier gewählten Bezeichnung.

Denn setzt man

$$y = x^n z \quad \ldots \quad (11)$$

so geht die Differentialgleichung (5) über in:

$$xz'' + (a_1 x + 2n + b_1)z' + (a_0 x + n a_1 + b_0)z = 0$$

und zur Bestimmung des Exponenten $n$ hat man die Gleichung

$$n - 1 + b_1 = 0$$

Die neue Differentialgleichung aber liefert wie vorhin eine andere Form

$$z = \int_{u_0}^{u_1} e^{ux} V du$$

Durch diese Angaben des Herrn Weiler ist nun auch das zweite particuläre Integral von (5) in jeder Hinsicht vollständig bestimmt. Denn da $n = 1 - b_1$, so ist die neue Differentialgleichung

$$xz'' + (a_1 x + 2 - b_1)z' + (a_0 x + a_1 - a_1 b_1 + b_0)z = 0 \quad \ldots \quad (12)$$

welche von derselben Form wie (5) ist und worin die Coëfficienten von $x$ wie in (5) wieder $a_1$ und $a_0$ sind, somit nach (9) auch die Grössen $\alpha$ und $\beta$ die früheren Werthe behalten, daher die „andere Form", welche der neuen Gleichung genügt, nach Petzval ein bestimmtes Integral:

$$z = \int_{\alpha}^{\beta} e^{ux} (u - \alpha)^{A_1 - 1} (u - \beta)^{B_1 - 1} du$$

sein muss. Da ferner die Gleichung (12) sich von jener (5) nur darin unterscheidet, dass

$$2 - b_1 \text{ für } b_1 \text{ und } a_1 - a_1 b_1 + b_0 \text{ für } b_0$$

steht, so ergeben sich $A_1$, $B_1$ unmittelbar aus den Gleichungen (10) für $A$, $B$ und erhält man:

$$A_1 = \frac{2 - b_1}{2} + \frac{2b_0 - a_1 b_1}{2\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}, \quad B_1 = \frac{2 - b_1}{2} - \frac{2b_0 - a_1 b_1}{2\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}$$

oder, was dasselbe ist:

$$A_1 = 1 - \left[\frac{b_1}{2} - \frac{2b_0 - a_1 b_1}{2\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}\right], \quad B_1 = 1 - \left[\frac{b_1}{2} + \frac{2b_0 - a_1 b_1}{2\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}\right] \ldots (13)$$

wofür man kürzer auch $A_1 = 1 - B$, $B_1 = 1 - A$ schreiben kann.

Das von Weiler gefundene zweite particuläre Integral von (5) ist daher:

$$y_2 = x^{1-b_1} \int_{\alpha}^{\beta} e^{ux} (u-\alpha)^{A_1-1} (u-\beta)^{B_1-1} du \quad \ldots (14)$$

folglich das Petzval-Weiler'sche allgemeine Integral jener Gleichung:

$$\begin{aligned} y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \\ + C_2 x^{1-b_1} \int_{\alpha}^{\beta} e^{ux} (u-\alpha)^{A_1-1} (u-\beta)^{B_1-1} du \end{aligned} \quad \ldots (15)$$

Wie man sieht, sind hier die beiden Integrale $y_1$, $y_2$ nach dem von Petzval und Weiler auf das deutlichste beschriebenen, selbst von einem Anfänger nicht zu verfehlenden Wege berechnet worden.

Spitzer hat nun aber bezüglich der Schreibweise des Weiler'schen Integrals $y_2$ zwei ganz erstaunenswürdige Verbesserungen gemacht. Er hat nämlich Erstens für die Exponenten $A_1$ und $B_1$ die vorhin angegebenen Ausdrücke $1-B$ und $1-A$ leibhaftig hineingeschrieben, und Zweitens in dem Factor $x^{1-b_1}$ den Exponenten statt durch den, vermöge der Gleichung (5) direct schon gegebenen Coëfficienten $b_1$ durch die erst zu berechnenden Grössen $A$ und $B$ ausgedrückt, und zwar, weil $A+B=b_1$ ist, geschrieben:

$$1-b_1 = 1-A-B$$

was natürlich — honni soit qui mal y pense — viel schöner und viel einfacher ist.

Ist nun durch diese, weder das Wesen noch die Form, noch den Werth von $y_2$ im Geringsten berührende Buchstaben-Vertauschung das Weiler'sche Integral in ein Spitzer'sches umgeprägt worden und in den „geistigen" Besitzstand Spitzer's übergegangen? Ich behaupte nein! und bin der, gewiss von Jedermann getheilten Ueberzeugung, dass nur Demjenigen, der zuerst den Gedanken, zu einem mathematischen Resultat zu gelangen, klar ausgesprochen und den Weg, dasselbe zu finden, unverfehlbar vorgezeichnet hat, also hier Herrn Weiler, nicht aber Demjenigen, der dieses Resultat blos mit anderen Buch-

staben schreibt, hier also nicht Herrn Spitzer, die Priorität, und das Resultat selbst als geistiges Eigenthum gebührt. Diese Ueberzeugung steht so fest, dass selbst ein von Spitzer zusammengesetztes „Comité" mich zu keiner andern hinüber majorisiren könnte.

Was nun das Petzval'sche Integral $y_1$ betrifft, so legte Spitzer seine verbessernde Hand nur insoweit an, als er statt des Buchstabens $A'$ bei Petzval den Buchstaben $B$ geschrieben, sonst aber das Integral in buchstäblicher Reinheit aus dem Werke Petzval's in den „Studien" (S. 7) verwerthet hat — ohne aber ein Wort davon zu sagen, dass dasselbe von Petzval in dieser Form geschrieben und von Euler schon 90 Jahre früher in gleichbedeutender Form gefunden worden ist. Nun folgt die grösste Leistung Spitzer's, die verewigt zu werden allen Anspruch hat! Er „thut einen kühnen Griff" und erklärt sowohl in den „Studien" als im „Anhang" die beiden particulären Integrale (8) und (14) von Petzval und Weiler, sammt dem aus ihnen zusammengesetzten allgemeinen Integral (15) rundweg für sein geistiges Eigenthum! Sollte der geehrte Leser dies für unmöglich halten, so stehen Beweise in mehr als genügender Zahl zu Gebot.

S. 8 der „St." ist zu lesen:

„Von der Gleichung (5) habe ich daher bis jetzt zwei Integrale anzugeben vermocht, das eine ist

$$y_1 = \int_\alpha^\beta e^{ux}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}du$$

das andere ist . . . (16)

$$y_2 = x^{1-A-B}\int_\alpha^\beta e^{ux}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}du$$

und das vollständige Integrale:

$$y = C_1\int_\alpha^\beta e^{ux}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}du$$
$$+ C_2 x^{1-A-B}\int_\alpha^\beta e^{ux}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}du \quad . . . (17)$$

unter $C_1$ und $C_2$ willkürliche Constanten verstanden."

S. 156 des „Anhanges" schreibt Spitzer:

„Haben diese beiden particulären Integrale*) nicht eine höchst verdächtige Aehnlichkeit mit den von mir gefundenen, welche lauten:" (folgen die Formeln 16).

S. 166 heisst es weiter:

„Ich habe das Integrale der Differentialgleichung (5) in folgender Form gegeben:" (folgt Formel 17).

S. 169 wird gesagt:

„Später vergleicht Winckler das von mir aufgestellte Integrale:" (folgt abermals 17).

Durch solche vom Anfang bis zum Ende des „Anhanges" wiederholte, ganz unqualificirbare Zugriffe soll also bei hellem Tageslicht den Herren Petzval und Weiler entrissen und Spitzer zugeeignet werden, was jene lange vor diesem vollständig festgestellt und veröffentlicht haben! Nun urtheile der Leser selbst: Liegt hierin nicht eines der monströsesten Plagiate, durch welche die mathematische Literatur je befleckt worden ist?

Schon in meiner früher erschienenen Schrift habe ich nachgewiesen, das Spitzer die beiden in Rede stehenden Integrale fälschlich für sich in Anspruch nehme. S. 167 des „Anhanges" **) erwidert Spitzer hierauf: „Ich habe in meinen Studien Petzval's Werk oft citirt, kein ehrlicher Mensch hat mir bisher noch einen literarischen Diebstahl nachgewiesen."

Das Wort „ehrlich" in Verbindung mit „citirt" tritt hier wie in vielen anderen Auslassungen des „Anh." mit einem bedenklichen Nachdruck hervor, der an ein bekanntes Dictum des alten Lichtenberg über den Gegensatz zwischen demjenigen, was die Leute immer im Munde führen und demjenigen, was sie selbst am meisten prakticiren, in Erinnerung bringt. Es hat dies mich veranlasst, über gewisse Citirpraktiken, mit welchen die Gründung eines Besitzstandes „geistigen Eigenthums" enge zusammenhängt, eine kleine Untersuchung anzustellen. Die eigenen Worte Spitzer's mögen dieselbe eröffnen. In der Einleitung zu den „St." ist Folgendes zu lesen:

---

*) Es sind dies die unter (24) und (25) später folgenden Formeln.

**) Der Kürze wegen werde ich von jetzt an, statt „Anhang" blos „Anh." setzen.

„Im ersten Abschnitte wird die Integration der Differentialgleichungen von der Form

$$(a_2 + b_2 x)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x)y = 0$$

woselbst $a_2$, $a_1$, $a_0$, $b_2$, $b_1$, $b_0$ constante Zahlen bedeuten, welche bekanntlich Euler, Laplace, Mainardi, Petzval und Weiler behandelten, gegeben. Ich glaube sagen zu dürfen, dass trotz der Arbeiten der genannten Männer eine reiche Nachlese für mich übrig blieb."

Dann folgt als Randbemerkung ganz summarisch die blosse Angabe der Nummern von Bänden der betreffenden Werke, die Jahreszahlen ihres Erscheinens und die Seitenzahlen, mit welchen die Abhandlungen der genannten Autoren beginnen, — sonst nichts! Im Text (Abschn. 1) selbst kommt kein specielles Citat vor, woraus der Leser erfahren könnte, von welchen Autoren die Hauptresultate herrühren; überall heisst es „ich" oder „wir" (Spitzer spricht von sich selbst im plurale maestoso) „haben gefunden". Nur wo Spitzer einem oder dem andern Autor, namentlich seinem Lehrer Petzval, eines anhängen zu können glaubt, — und dies geschieht sehr oft — wird am Rande „ehrlich citirt." (Siehe S. 5, 7, 23, 24, 25, 31.) Jeder mit der Literatur nicht näher vertraute Leser, der aus der Einleitung nur erfahren hat, dass die genannten Autoren jene Gleichung blos „behandelten" (also nicht etwa integrirten, was doch etwas ganz anderes ist), dass aber für Spitzer eine „reiche Nachlese übrig blieb", wird hierdurch zu der Meinung verleitet, dass alle Transformationen, alle Integrale, von deren Auffindung durch Andere nirgends ein Wort steht, wahrhaftiges „geistiges Eigenthum" Spitzer's seien.

Diese schlaue Praktik hat sich in der That nicht nur zur Irreführung, sondern auch als bequeme Hinterthür „bisher noch" vortrefflich bewährt. Wird Spitzer, wie ich z. B. in meiner frühern Schrift es gethan, entgegengehalten, das Integral (8) habe Petzval schon früher veröffentlicht, so ruft Spitzer sehr tief entrüstet aus: „Ich habe Petzval's Werk (!) oft citirt, kein ehrlicher Mensch hat mir bisher noch . . . . " Sagt man, wie ich a. a. O. gethan, das Integral (14) rühre von Weiler her, so ruft Spitzer aus der Hinterthür: „Ich habe die Arbeit (!)

von Weiler citirt." Auf meine Bemerkung, dass alle particulären Integrale, welche in Form reiner Quadraturen im 1. Abschn. der „St." vorkommen, nicht von Spitzer, sondern früher schon von Anderen gefunden wurden, entgegnet derselbe (S. 160 des „Anh.") „Ich habe freilich in meinen „St." die Arbeiten von . . . Euler, Jacoby, Lobatto, . . . Petzval, Weiler, . . . benutzt, ich habe sie aber auch alle in meinen „St." citirt". In der Einleitung die Titel der Werke citirt, im Text aber die Urheber der denselben ent—nommenen Resultate verschwiegen und die Resultate sich selbst zugeschrieben!

Dass diese Citirpraktik sogar ausgezeichnete Schriftsteller irregeführt hat, könnte ich an mehreren Fällen nachweisen; so ist z. B. im 2. Bd., S. 538 des „Compendium der höheren Analysis" von Herrn Schlömilch (Braunschweig 1866) zu lesen: „Die hauptsächlichsten Formeln zur Integration (namentlich 87 *) hat Spitzer in seinen „Studien" über die Integration linearer Differentialgleichungen entwickelt."

Ich frage nun, was ist von Anderen zu erwarten, die bei Lectüre der „St." unvorsichtig der Citirkunst Spitzer's vertrauen?

Rücksichtlich der Auffindung des zweiten Integrals der Gleichung (5) komme ich auf das Citat der „St." (S. 7) zurück. Dieses lautet pfiffig berechnet, captiös und nergelnd zugleich, wie folgt: „Weiler in Crelle's Journal, B. 55, 1858 gebraucht diese Substitution**) für Gleichungen der Form (5) ohne aber gehörig einzugehen in die Tragweite dieser Substitution."

Herr Weiler hat also blos „substituirt", weiter nichts: — wozu, zu welchem Zweck? das wird von Spitzer „ehrlich" verschwiegen. Dass Weiler bei voller Kenntniss der „Tragweite" der Substitution das zweite Integral suchte und fand, dass er ausführlich angab, wie dasselbe in allen Theilen zu berechnen ist, verheimlicht Spitzer vollständig, damit der Leser ja nicht auf den Gedanken komme, dass jenes Integral eben von Weiler und nicht von Spitzer gefunden wurde. Solches ist die Art,

---

*) Siehe oben das Petzval-Weiler'sche Integral (15)!

**) Nämlich $y = x^n z$, Gleichung (11).

wie Letzterer „ehrlich citirt" und für ein Resultat erkenntlich ist, das er in seinen „St." fast auf jeder Seite ausgenützt hat! — Indessen hat Herr Spitzer in gewisser Hinsicht doch Recht. Herr Weiler kannte offenbar die „Tragweite" nicht nur seiner Substitution, sondern auch seiner ganzen Arbeit „nicht gehörig", denn er hatte sicherlich keine Ahnung davon, dass diese Tragweite von Mannheim bis Wien reichen und dass da Einer die Arbeit auffangen, mit seiner eigenen Etiquette versehen und als sein „geistiges Eigenthum" „verwerthen" werde.

4.

Sowohl das Petzval'sche Integral $y_1$ in (8) als das Weiler'sche $y_2$ in (14) stellen nur dann endliche Werthe dar, wenn die reellen Theile von $A$, $B$ und von $A_1$, $B_1$ positiv sind, und dies ist gleichzeitig nur dann der Fall, wenn alle jene reellen Theile positive echte Brüche sind. Die Giltigkeit des aus $y_1$ und $y_2$ hergestellten allgemeinen Integrals (15) ist also auf einen sehr engen Bereich eingeschränkt, wozu noch der Umstand kommt, dass beide Integrale mit einander zusammenfallen, wenn $A+B=1$ ist.

Von diesen beiden Nachtheilen sind die Integrale frei, welche Petzval im I. Bd., S. 44 seines Werkes aufgestellt hat, und bei welchen blos unterschieden werden muss, ob $x$ positiv oder negativ ist.

Man hat nämlich, wenn $x$ positiv:

$$\begin{aligned} y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{ux}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,du \\ + C_2 \int_\alpha^{-\infty} e^{ux}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,du \end{aligned} \quad \ldots (18)$$

und wenn $x$ negativ ist:

$$\begin{aligned} y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{ux}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,du \\ + C_2 \int_\beta^{\infty} e^{ux}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\,du \end{aligned} \quad \ldots (19)$$

Diese Integrale gelten für alle positiven Werthe von $A$ und $B$ und fallen nicht zusammen, wenn $A+B=1$ ist; sie sind ausnahmsweise den „St." nicht einverleibt; Alles, was in diesen für die Integration der Gleichung (5) durch reine Quadraturen zu finden ist, besteht in dem Petzval-Weiler-schen Integral (15) resp. (17), welches Spitzer auf so honnete Art in sein „geistiges Eigenthum" umgewandelt hat. Stolz auf diese „reiche Nachlese" und deren seit 1860, also seit 18 Jahren schon fast ersessenen, „von keinem ehrlichen Menschen" angefochtenen Besitz, hält nun Spitzer auch sehr grosse Stücke auf jene Integrale und ergreift gerne die in meiner frühern Schrift ihm gebotene Gelegenheit, auf dieselben, im Entgegenhalt zu (18) und (19), eine Lobrede zu halten. Er sagt S. 169 des „Anh.":

„Später vergleicht Winckler das von mir aufgestellte Integral (15) resp. (17) mit dem von Petzval für positive Werthe von $x$ aufgestellten Integral in (18), findet letzteres besser — offenbar nur aus dem Grunde, weil dies Winckler nicht versteht. Vielleicht wird Winckler aufgeklärt, wenn er den §. 33 dieser Vorlesungen liest." Ich habe nun, um aufgeklärt zu werden, diesen Paragraph wirklich gelesen, muss aber gestehen, dass ich immer noch nicht weiss, warum, wenn z. B. $A$ und $B$ über $+1$ liegen, das Integral (17), dessen zweiter Theil dann unendlich gross und unbrauchbar wird, besser sein soll, als das Integral (18), welches immer in voller Giltigkeit fortbesteht. Da man es aber im Puncte der Logik mit Spitzer nicht so genau nehmen darf, so las ich in jenem zu meiner Belehrung geschriebenen §. 33 weiter und rückte zu dem Passus vor, der da heisst:

„Die von mir in diesem Capitel aufgestellten vollständigen Integrale der Gleichung (5) sind weit complicirter als die Integrale (18 u. 19), aber sie haben drei wesentliche Vortheile vor den eben angeführten voraus.

„Erstens sind meine Integrale giltig, ob $x$ positiv oder negativ, reell oder imaginär ist."

Von einem „wesentlichen Vortheil" kann hierbei schon darum gar nicht die Rede sein, weil das in der Form

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du$$
$$+ C_2 \int_\beta^{\mp\infty} e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} du \quad . . . (20)$$

geschriebene Integral von Petzval, — die Bedeutung des Doppelzeichens festgehalten — ebenfalls immer giltig ist.

Spitzer docirt sodann:

„Zweitens lassen sich bei den von mir aufgestellten vollständigen Integralen die willkürlichen Constanten bestimmen durch Bedingungen etwa der folgenden Art:

für $x = -K$ soll $y = M$ sein
„ $x = +K$ „ $y = N$ „

woselbst $K$, $M$ und $N$ beliebige Zahlen bedeuten, was sich bei den oben aufgestellten Integralen (18 u. 19) nicht thun lässt, weil das Integral (19) nur für negative Werthe von $x$ gilt; man kann daher bei dem Integral (19) blos die erste Bedingung in Rechnung bringen, nicht aber die zweite."

Mit dieser Bemerkung, die fast so aussieht, als wolle Spitzer auch einmal das Gebiet der Deduction betreten, wird rundweg behauptet, man könne die Constanten $C_1$ und $C_2$ den genannten Bedingungen gemäss nicht bestimmen. Da aber das allgemeine Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung nur zwei willkürliche Constante enthalten kann, die constant sind, weil sie mit $x$ sich nicht ändern, so finden, wenn der Kürze wegen: $V = (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1}$ gesetzt wird, den von Spitzer gestellten Bedingungen entsprechend, die beiden Gleichungen:

$$M = C_1 \int_\alpha^\beta e^{-uK} . V . du + C_2 \int_\beta^{+\infty} e^{-uK} . V . du,$$

$$N = C_1 \int_\alpha^\beta e^{+uK} . V . du + C_2 \int_\beta^{-\infty} e^{+uK} . V . du$$

statt, aus welchen doch wohl die Werthe von $C_1$ und $C_2$ berechnet werden können. Diese Werthe geben in (20) substituirt

für $y$ eine Function von $x$, welche, — die leichte Probe lehrt dies — jenen Bedingungen vollständig Genüge leistet. Spitzer aber weiss dies besser, er sagt auctoritativ: „das lasst sich nicht thun", und beweist damit, dass sein Verständniss, trotz der vielen „schlaflosen Nächte", zur Bestimmung der Constanten einer linearen Differentialgleichung selbst in den einfachsten Fällen immer noch nicht hinreicht, und er besser thäte, sich selbst mit den Elementen der Integralrechnung auf einen vertrautern Fuss zu stellen, bevor er Andere darüber „aufklären" will.

Er fährt fort:

„Drittens lassen sich die von mir aufgestellten Integrale in unendliche convergente Reihen entwickeln und diese Reihen leisten auch den Differentialgleichungen Genüge. Anders aber ist es mit dem in (19) stehenden Integrale. Versucht man die oben aufgestellten Integrale, etwa:

$$y_2 = \int_\beta^\infty e^{ux}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}du\,,\ x<0$$

in unendliche Reihen zu entwickeln, so sind diese divergent; ich bin durch dies gar nicht einmal von der Richtigkeit des Integrals (19) überzeugt, ja ich weiss nicht einmal, ob überhaupt das Integrale (19) einen Sinn hat, so wenig als ich weiss, ob und welchen Sinn eine divirgente Reihe hat."

Das Integral (19) hat „einen Sinn", wenn die beiden particulären Integrale bestimmte endliche Grössen sind. Das erste derselben hat, $A$ und $B$ immer als positiv vorausgesetzt, wohl auch in den Augen Spitzer's einen solchen Sinn. Es kommt also nur auf das zweite $y_2$ an, für $x<0$. Aber da bekennt Spitzer, der mich aufklären will, er wisse, ohne Gebrauch von Reihen, über die Endlichkeit eines Integrals nicht in's Klare zu kommen, ja er wisse überhaupt nicht, ob $y_2$ eine bestimmte endliche Grösse ist oder nicht, während doch jeder Anfänger in der Integralrechnung weiss, wie leicht hierüber mit Hilfe des gewöhnlichen Mittelwerthsatzes entschieden werden kann, und bewiesen wird, dass speciell $y_2$ gerade so gut wie die Gammafunction, — mit der ja auch Spitzer ohne alle Scrupel rechnet — unter den gemachten Voraussetzungen, einen bestimmten endlichen Werth hat.

Da mir der Leser die Reproduction dieses ganz elementaren Beweises gerne erlassen wird und andererseits ich nicht die Aufgabe habe, die elementar-mathematischen Kenntnisse Spitzer's zu ergänzen, so kann ich Letztern nur auf irgend ein gutes Lehrbuch der Integralrechnung verweisen.

5.

Behufs leichterer Hinweisung auf das Werk von Petzval und die „St." habe ich mich bisher der daselbst angewendeten Bezeichnung bedient, werde nun aber, des Folgenden wegen, die in meinen Abhandlungen (A) und (C) gewählten Bezeichnungen einführen. Ich habe dort die Gleichung (5) wie folgt geschrieben:

$$xy'' + 2(k_0 x + k)y' + (l_0 x + l)y = 0 \qquad \ldots (21)$$

wofür aus (10) und (13) die Werthe:

$$A = k - \frac{2k_0 k - l}{2\sqrt{k_0^2 - l_0}}, \qquad B = k + \frac{2k_0 k - l}{2\sqrt{k_0^2 - l_0}}$$

$$A_1 = 1 - \left[k + \frac{2k_0 k - l}{2\sqrt{k_0^2 - l_0}}\right], \quad B_1 = 1 - \left[k - \frac{2k_0 k - l}{2\sqrt{k_0^2 - l_0}}\right]$$

und aus (9)

$$\alpha = -k_0 + \sqrt{k_0^2 - l_0}, \qquad \beta = -k_0 - \sqrt{k_0^2 - l_0}$$

sich ergeben.

Es sei nun $v$ eine neue Veränderliche, welche mit der frühern $u$ durch die Relation

$$v - \beta = u$$

verbunden ist. Die particulären Integrale (8) und (14) gehen dann über in:

$$y_1 = e^{-(k_0 + \sqrt{k_0^2 - l_0})x} \int_0^{2\sqrt{k_0^2 - l_0}} e^{ux} u^{B-1} \left[2\sqrt{k_0^2 - l_0} - u\right]^{A-1} du$$

$$y_2 = x^{1-2k} e^{-(k_0 + \sqrt{k_0^2 - l_0})x} \int_0^{2\sqrt{k_0^2 - l_0}} e^{ux} u^{B_1 - 1} \left[2\sqrt{k_0^2 - l_0} - u\right]^{A_1 - 1} du$$

wobei wieder $u$ für $v$ geschrieben wurde. Legt man jetzt und fernerhin den Grössen $\alpha$, $\beta$, $A$, $B$, $A_1$, $B_1$ eine andere Bedeutung

bei, setzt man nämlich $\alpha$ statt $B$, $\beta$ statt $A$, $\alpha_1$ statt $B_1$, $\beta_1$ statt $A_1$, so dass also:

$$\alpha = k + \frac{2k_0 k - l}{2\sqrt{k_0^2 - l_0}} \quad , \quad \beta = k - \frac{2k_0 k - l}{2\sqrt{k_0^2 - l_0}} \quad \ldots (22)$$
$$\alpha_1 = 1 - k + \frac{2k_0 k - l}{2\sqrt{k_0^2 - l_0}} \quad , \quad \beta_1 = 1 - k - \frac{2k_0 k - l}{2\sqrt{k_0^2 - l_0}}$$

so sind in meiner Schreibweise die Petzval-Weiler'schen Integrale die folgenden:

$$y_1 = e^{-(k_0 + \sqrt{k_0^2 - l_0}).x} \int_0^{2\sqrt{k_0^2 - l_0}} e^{ux} u^{\alpha - 1} \left[2\sqrt{k_0^2 - l_0} - u\right]^{\beta - 1} du \quad \ldots (23)$$
$$y_2 = x^{1-2k} e^{-(k_0 + \sqrt{k_0^2 - l_0}).x} \int_0^{2\sqrt{k_0^2 - l_0}} e^{ux} u^{\alpha_1 - 1} \left[2\sqrt{k_0^2 - l_0} - u\right]^{\beta_1 - 1} du$$

Ich mache nun in der bestimmtesten Weise darauf aufmerksam, dass diese beiden Integrale, welche Spitzer sich zuzueignen versucht hat, in der Abhandl. (A) zur Lösung meiner Aufgabe nur je einmal auftreten, dass namentlich bei meinen Integralen — welche nun ausführlich folgen werden, nicht 0 und $2\sqrt{k_0^2 - l_0}$, sondern durchgehend 0 und $\infty$ die Integrationsgrenzen bezüglich derselben Variabeln $u$ sind, und in diesem Alles entscheidenden Umstand, welchen Spitzer in seinem „Anhang" sorgsam zu vertuschen sucht, beruht die gänzliche Verschiedenheit meiner von allen früher bekannten Lösungen, nicht etwa von solchen Spitzer's, — da dieser nicht eine einzige in Form einer einfachen Quadratur selbst gefunden hat. Meine Integrale unterscheiden sich aber von den vorhin erwähnten nicht blos rücksichtlich der Integrationsgrenzen, sondern auch ihrer Giltigkeitsbedingungen, die ich auf die geringste Zahl reducirt habe.

Was ferner die Ausdrücke unter den Integralzeichen betrifft, so habe ich dieselben weder nach dem Verfahren Petzval's, das Spitzer buchstäblich nachgebildet *) und dann „Laplace'sche Methode" genannt hat, — noch auf dem von Weiler einge-

*) Siehe die rührende Uebereinstimmung bei Petzval I. S. 38 und Spitzer, „Studien" 1. Abschn., S. 3, wo abermals „ehrlich citirt" wird.

schlagenen Wege, sondern, wie früher schon bemerkt, auf zwei durchaus verschiedene Arten, nemlich in der Abhandlung (A) unmittelbar aus den Grundformeln von Euler (Inst. calc. intgr. Art. 1040) und in der Abhandlung (C) mit Hilfe eines neuen Satzes abgeleitet, wobei sich zugleich alle constanten Grössen, namentlich die Exponenten $\alpha$, $\beta$, $\alpha_1$, $\beta_1$, direct ergaben. Dass dies ohne Kunstgriffe geschehen und damit die Herleitung aller particulären Integrale auf eine gemeinsame Grundlage gestellt werden kann, ist, wie ich glaube, immerhin von einigem Interesse, wurde aber früher von Niemandem gezeigt.

Das aus den Euler'schen Formeln gezogene Ergebniss bestand nun darin, dass der Gleichung (21) zwei Ausdrücke genügen, deren allgemeine Form:

$$e^{-(k_0+\sqrt{k_0^2-l_0})x}\int_{u_0}^{u_1} e^{\gamma x u} u^{\alpha-1}(c-u)^{\beta-1}du \qquad \ldots (24)$$

$$x^{1-2k} e^{-(k_0+\sqrt{k_0^2-l_0})x}\int_{u_0}^{u_1} e^{\gamma x u} u^{\beta_1-1}(c-u)^{\alpha_1-1}du \qquad \ldots (25)$$

ist, worin $\alpha_1+\beta=\alpha+\beta_1=1$ und $c$, $\gamma$ zwei nur durch die Gleichung

$$c\gamma=2\sqrt{k_0^2-l_0}$$

bestimmte constante Grössen, ferner $u_0$, $u_1$ zwei von $x$ unabhängige Grenzwerthe sind, für welche resp.

$$\Big[e^{\gamma x u}u^{\alpha}(c-u)^{\beta}\Big]_{u_0}^{u_1}=0 \text{ und } \Big[e^{\gamma x u}u^{\beta_1}(c-u)^{\alpha_1}\Big]_{u_0}^{u_1}=0 \ldots (26)$$

werden muss.

S. 155 des „Anh." macht nun Spitzer die falsche Angabe, ich hätte die Ausdrücke (24) und (25) als particuläre Integrale der Gleichung (21) bezeichnet, und es hätten dieselben „eine höchst verdächtige Achnlichkeit" mit den angeblich von ihm gefundenen Integralen (8) und (14). Dass es sinnlos wäre, jene Ausdrücke ohne die vollständige Bestimmung der Grenzen $u_0$ und $u_1$ als Lösungen von (21) zu bezeichnen, liegt auf der Hand; dies hinderte aber Spitzer nicht, abermals „ehrlich zu citiren", weil er sonst hätte sagen müssen, dass die Grenzen

meiner Integrale nicht 0 und $2\sqrt{k_0^2 - l_0}$, sondern 0 und $\infty$ sind, woraus dann der Leser sofort nicht die „Aehnlichkeit", sondern die gänzliche Unähnlichkeit dieser und der Petzval-Weiler'schen Integrale in (23) erkannt hätte. Glaubt aber Spitzer wirklich an jene „verdächtige Aehnlichkeit", so beweist er damit, dass es ihm, wie wohl Jedem, der mit den Grundlehren der höhern Mathematik auf gespanntem Fusse lebt, — „schon alleseins" ist, ob dies oder jenes die Grenzen eines bestimmten Integrals sind.

6.

Ich lasse nun die Zusammenstellung meiner Lösungen der Gleichung (21) folgen.

Es wird zunächst $k_0^2 - l_0$ als von Null verschieden angenommen.

Ich unterschied in meiner Arbeit die möglichen vier Fälle rücksichtlich der Zeichen der reellen Theile von $\alpha$ und $\beta$ (Gleichungen 22), nicht aber der Werthe dieser Grössen, also nicht, ob sie etwa echte Brüche sind, oder nicht.

Es sei allgemein $x = \lambda + \mu\sqrt{-1}$

und $2\sqrt{k_0^2 - l_0} = \lambda_0 + \mu_0\sqrt{-1} = c\gamma$

Man wähle zwei constante Zahlen $\sigma$ und $\tau$ (die in allen Fällen entweder $-1$ oder $0$ oder $+1$ sein können), so, dass $\lambda\sigma - \mu\tau$ negativ und $\mu_0\sigma - \lambda_0\tau$ von Null verschieden wird und setze

$$\gamma = \sigma + \tau\sqrt{-1}$$

womit auch $c$ bestimmt ist.

Zur Abkürzung sei ferner:

$$P = e^{-(k_0 + \sqrt{k_0^2 - l_0})x} \quad , \quad Q = e^{-(k_0 - \sqrt{k_0^2 - l_0})x}$$

1. Wenn die reellen Theile von $\alpha$ und $\beta$ positiv sind, so leisten:

$$y_1 = P . \int^{\infty} e^{\gamma x u} u^{\alpha - 1} (c - u)^{\beta - 1} du$$

$$y_2 = Q . \int_0^{\infty} e^{\gamma x u} u^{\beta - 1} (c + u)^{\alpha - 1} du \qquad \ldots \text{(I)}$$

der Gleichung (21) Genüge. Diese beiden Integrale sind endliche Grössen, weil unter den gemachten Voraussetzungen der reelle Theil von $\gamma x$ negativ ist.

Will man in der obern Grenze auch $-\infty$ statt $+\infty$ zulassen, so können, wie ich in der Abhandlung (C) gezeigt, $\sigma$ und $\tau$ unmittelbar bestimmt und die beiden Integrale in folgender Weise geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= P.\int_0^{\pm\infty} e^{-xu} u^{\alpha-1} (u+2\sqrt{k_0^2-l_0})^{\beta-1} du \\ y_2 &= Q.\int_0^{\pm\infty} e^{-xu} u^{\beta-1} (u-2\sqrt{k_0^2-l_0})^{\alpha-1} du \end{aligned}\right\} \quad \ldots (\mathrm{I}^1)$$

wobei das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem der reelle Theil von $x$ positiv oder negativ ist.

Nirgends kommen in den „St." Spitzer's die Formeln (I) oder ($\mathrm{I}^1$) oder überhaupt irgend zwei für alle möglichen positiven Werthe der reellen Theile von $\alpha$ und $\beta$ giltige Integrale in Form reiner Quadraturen vor. Was Spitzer dort S. 8 vorbringt, sind wieder die Petzval-Weiler'schen Integrale (8) und (14), welche nur gelten, wenn die reellen Theile von $\alpha$ und $\beta$ zwischen 0 und 1 liegen. Alles übrige bewegt sich in Formen, die keine reinen Quadraturen, sondern mit einer doppelten Serie höherer Differentialquotienten verquickte, in den meisten Fällen undiscutirbare Ausdrücke sind und in meinen Abhandlungen durchaus unberücksichtigt geblieben sind, welche ich aber der Curiosität wegen hier anführen will. S. 13 der „St." ist als das dem vorliegenden Fall entsprechende Integral:

$$y = e^{\beta x} . \frac{d^b}{dx^b}\left[e^{(\alpha-\beta)x}\frac{d^a}{dx^a}(e^{-\alpha x}.Y)\right] \quad \ldots (27)$$

angegeben, wo $Y$ wieder das Integral einer andern Differentialgleichung bedeutet. Ist dies etwa eine reine Quadratur oder meine in (I) aufgestellte Lösung oder ist es, namentlich für grosse Werthe von $a$ und $b$, zur Untersuchung geeigneter als

jene Lösung, deren Form niemals complicirter wird, welches auch die Werthe der constanten Grössen sein mögen?

2. Wenn die reellen Theile von $\alpha$ und $\beta$ negativ sind, so genügen nach Abhandlung (A) der Gleichung (21) die Integrale:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x^{1-2k} . P \int_0^\infty e^{\gamma x u} . u^{-\beta} (c-u)^{-\alpha} du \\ y_2 &= x^{1-2k} . Q \int_0^\infty e^{\gamma x u} . u^{-\alpha} (c+u)^{-\beta} du \end{aligned}\right\} \quad \ldots (II)$$

wobei $\gamma$, $c$, $\sigma$, $\tau$ die oben angegebene Bedeutung haben.

Will man auch hier die obere Grenze $-\infty$ zulassen, so können, wie ich in Abhandl. (C) gezeigt, $\sigma$ und $\tau$ unmittelbar angegeben und die Integrale wie folgt geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x^{1-2k} P . \int_0^{\pm\infty} e^{-xu} u^{-\beta} [u + 2\sqrt{k_0^2 - l_0}]^{-\alpha} du \\ y_2 &= x^{1-2k} Q . \int_0^{\pm\infty} e^{-xu} u^{-\alpha} [u - 2\sqrt{k_0^2 - l_0}]^{-\beta} du \end{aligned}\right\} \quad \ldots (II^1)$$

wobei das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem der reelle Theil von $x$ positiv oder negativ ist.

Keines dieser Integrale kommt in den „St." Spitzer's vor; auch kein anderes weiss Spitzer für beliebige negative Werthe von $\alpha$ und $\beta$ in Form einer reinen Quadratur anzugeben. Was er dort (S. 14) hierüber vorbringt, ist gar keine Formel, sondern blos die Reduction auf einen Ausdruck von der Form (27), worüber ich hier kein weiteres Wort zu verlieren habe.

3. Wenn der reelle Theil von $\alpha$ positiv, jener von $\beta$ aber negativ oder Null ist, so genügt, wie ich in der Abhandlung (A) gezeigt, der Gleichung (21) ein particuläres Integral von der Form

$$P . \int_0^\infty e^{\gamma x u} u^{\alpha - 1} (c-u)^{\beta - 1} du$$

und ein anderes von ganz analoger Form, welches jedoch mit dem erstern zusammenfällt, wenn $1-2k=0$ oder also $\alpha+\beta=1$ ist. In diesem Falle lässt sich nun allerdings nach der gewöhnlichen, schon von Euler befolgten Methode ein Integral herleiten, welches aber unter dem Zeichen einen Logarithmus enthält, der die Einfachheit beeinträchtigt und die Discussion erschwert. Später habe ich in der Abhandlung (C) gezeigt, dass sich solche Integrale mit Logarithmen unter dem Zeichen durchaus vermeiden lassen und ein zweites particuläres Integral wie folgt gefunden werden kann. Es sei $m$ eine positive ganze Zahl, so gross gewählt, dass der aus der Gleichung

$$\rho=m-\alpha$$

sich ergebende reelle Theil von $\rho$ positiv ist.

Man setze ferner zur Abkürzung*):

$$f(t)=t^m+m.\frac{\beta}{1}t^{m-1}+m(m-1).\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}t^{m-2}+\ldots$$
$$+m(m-1)\ldots1.\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{1.2\ldots m}$$

so sind:

$$y_1=P.\int_0^\infty e^{\gamma xu}u^{\alpha-1}(c-u)^{\beta-1}du$$
$$\ldots(\mathrm{III})$$
$$y_2=x^{1-2k}Q.\int_0^\infty e^{\gamma xu}u^\rho(c+u)^{-2k-\rho}.f[-\gamma x(c+u)]$$

zwei der Gleichung (21) genügende particuläre Integrale.

Die Anwendung dieser Formeln ist sehr leicht. Ist z. B. die Gleichung: $xy''+(2k_0x+1)y'+[l_0x+k_0-\sqrt{k_0^2-l_0}]y=0$ gegeben, so hat man

$$1-2k=0\quad,\quad l=k_0-\sqrt{k_0^2-l_0}\quad,\quad\alpha+\beta=1.$$

Nimmt man an, es sei $x$ eine complexe Variable $\xi+\eta\sqrt{-1}$, wobei $\xi$, $\eta$ positiv sind; setzt man ferner voraus, es sei $l_0>k_0^2$,

*) Ich berichtige bei dieser Gelegenheit ein in der Abhandl. (C) vorkommendes Versehen, welches übrigens dem Leser nicht leicht entgehen kann. In den daselbt Art. 6 angegebenen Gleichungen (11) müssen die Schlussglieder von $f_1(t)$, $f_2(t)$ die Factoren $\beta+m-1$, $\alpha+n-1$, und nicht $\beta+m$ resp. $\alpha+n$ enthalten.

so ist $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 2\sqrt{l_0 - k_0^2}$ und kann $\sigma = -1$, $\tau = 0$, also $\gamma = -1$, $c = -2\sqrt{k_0^2 - l_0}$ gesetzt werden.

Da $\alpha = 1$, $\beta = 0$ sich ergibt, so kann man $m = 2$ setzen, wofür $\rho = 1$, und $f(t) = t^2$ erhalten wird.

Aus (III) folgt nun

$$y_1 = P.\int_0^\infty \frac{e^{-xu}\,du}{u + 2\sqrt{k_0^2 - l_0}} \quad , \quad y_2 = Q$$

wobei $P$, $Q$ die bisherige Bedeutung haben. Es ist leicht, von der Richtigkeit dieser Integrale sich zu überzeugen.

4. Wenn der reelle Theil von $\alpha$ negativ oder Null, jener von $\beta$ aber positiv ist, so ergibt sich die Auflösung wie folgt. Bezeichnet $n$ eine positive ganze Zahl, wofür der aus

$$\rho = n - \beta$$

sich ergebende reelle Theil von $\rho$ positiv ist, und setzt man

$$f(t) = t^n + n \cdot \frac{\alpha}{1} t^{n-1} + n(n-1)\frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} t^{n-2} + \cdot\cdot\cdot$$
$$+ n(n-1)\,.\,.\,1 \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\,.\,.\,(\alpha+n-1)}{1\,.\,2\,.\quad n}$$

so sind

$$y_1 = Q.\int_0^\infty e^{\gamma xu} u^{\beta-1} (c+u)^{\alpha-1}\,du$$
$$\ldots \text{(IV)}$$
$$y_2 = x^{1-2k} P.\int_0^\infty e^{\gamma xu} u^{\rho} (c \quad u)^{-2k-\rho} f[\gamma x(c-u)]\,du$$

particuläre Integrale der Gleichung (21). Auch in (III) und (IV) haben c, $\gamma$, $\sigma$, $\tau$ die früher angegebene Bedeutung.

Nicht nur keines der Integrale (III) und (IV), sondern überhaupt gar keines, welches eine blosse Quadratur wäre, kommt in den „St." vor. Die Lösungen, welche Spitzer daselbst im §. 14 nicht in Gestalt irgend einer Formel, sondern durch eine Anzahl auszuführender Reductionen blos beschreibend angibt, führen zuletzt wieder auf die Form (27), die eine doppelte Reihe mit dem Petzval-Weiler'schen Integral auszuführender Differentiationen höherer Ordnung er-

fordert. Von derartigen Lösungen ist, ich wiederhole dies, in meinen Abhandlungen nirgends die Rede. Ich wiederhole ferner, dass ausser den Integralen von Petzval und Weiler in den „St." Spitzer's keine Lösungen der Gleichung (21) in Form je eines einfachen bestimmten Integrals vorkommen.

Liegen daher die reellen Theile von $\alpha$ und $\beta$ nicht zwischen 0 und 1, so sucht man in den „St." vergebens nach zwei verschiedenen particulären Integralen in Form (je einer) blossen Quadratur, und ebenso in dem Fall, wenn $\alpha$ und $\beta$ über 1 oder unter Null liegen, oder wenn diese entgegengesetzte Zeichen haben.

Da Spitzer diese Thatsache nicht widerlegen kann, so greift er im „Anh.", wie jedesmal, wenn er sich rechtfertigen oder etwas beweisen soll, zu einer — Ausflucht; er sagt: „Das ist wieder ganz erfunden, und ich kann mir die Widerlegung dieser erfundenen Behauptung wohl ersparen." Gegen solche „Beweise" mögen die Götter kämpfen; ich habe darüber kein weiteres Wort zu verlieren!

Wenn in der Gleichung (1) der besondere Fall eintritt, dass $K_0{}^2 - H_0 L_0 = 0$ ist, so hat man es in der Gleichung (21) mit dem bisher ausgeschlossenen Fall $k_0{}^2 - l_0 = 0$, oder also mit der Gleichung

$$xy'' + 2(k_0 x + k)y' + (k_0{}^2 x + l)y = 0 \qquad \ldots (28)$$

zu thun, von welcher in den §§. 23—27 des 1. Abschn. der „St." gehandelt wird.

Auch bei dieser Gleichung hat Spitzer für gar keine Werthe der Coëfficienten irgend zwei particuläre Integrale in der ausschliesslichen Form einfacher bestimmter Integrale anzugeben vermocht; er nimmt deshalb zu folgender Ausrede seine Zuflucht: „Man gelangt daher auch zu keinen Integrationsgrenzen (dies ist wieder der fatale Casus!) und ist somit in diesem Falle genöthigt, einen andern Weg aufzusuchen, um die vorgelegte Gleichung zu integriren." Dieser nun von Spitzer betretene Weg führt wieder zu Ausdrücken mit doppelten Differentialquotienten von der Form (27).

Da Spitzer im Punct blosser Quadraturen weder selbst noch in fremden Schriften irgend etwas gefunden hat und im

„Anh." mit vorsichtigem Schweigen an diesem Punct vorbeigeht, so werde ich die in meiner Abhandlung (A) und jener (C) abgeleiteten, der Gleichung (28) genügenden bestimmten Integrale hier anführen. Es sei $2k_0 k - l$ von Null verschieden. Man setze zur Abkürzung

$$\alpha = 2k - \frac{1}{2} \quad , \quad r = 4\sqrt{2k_0 k - l}\,.\sqrt{x}$$

$$P = e^{-k_0 x - 2\sqrt{2k_0 k - l}\,.\sqrt{x}} \quad , \quad Q = e^{-k_0 x + 2\sqrt{2k_0 k - l}\,.\sqrt{x}}$$

Dann sind meine Integrale die folgenden:

1. Wenn der reelle Theil von $\alpha$ positiv ist:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= P.\int_0^{\pm\infty} e^{-ru}[u(1+u)]^{\alpha-1}du \\ y_2 &= Q.\int_0^{\pm\infty} e^{-ru}[u(1-u)]^{\alpha-1}du \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(V)}$$

2. Wenn der reelle Theil von $\alpha$ negativ ist:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x^{1-2k}P.\int_0^{\pm\infty} e^{-ru}[u(1+u)]^{-\alpha}du \\ y_2 &= x^{1-2k}Q.\int_0^{\pm\infty} e^{-ru}[u(1-u)]^{-\alpha}du \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(VI)}$$

In beiden Fällen gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem der reelle Theil von $r$ positiv oder negativ ist.

Tritt der hiebei ausgeschlossene Fall $2k_0 k - l = 0$ ein, so hat man es mit der Gleichung:

$$xy'' + 2(k_0 x + k)y' + (k_0{}^2 x + 2k_0 k)y = 0$$

zu thun, deren particuläre Integrale sich unmittelbar angeben lassen; sie sind:

$$y_1 = e^{-k_0 x} \quad , \quad y_2 = x^{1-2k}e^{-k_0 x}$$

und wenn $k = \frac{1}{2}$ ist (nach der Methode von Euler)

$$y_1 = e^{-k_0 x} \quad , \quad y_2 = e^{-k_0 x}\log x$$

Für $k=\frac{1}{4}$, also $\alpha=0$ hat man die Gleichung:

$$xy''+(2k_0x+\frac{1}{2})y'+(k_0{}^2x+l)y=0$$

und aus (VI):

$$y_1=e^{-k_0x-\sqrt{2k_0-4l}\,.\,\sqrt{x}}$$

$$y_2=e^{-k_0x+\sqrt{2k_0-4l}\,.\,\sqrt{x}}$$

Ich constatire auch hier, dass nicht eine der Formeln (V) und (VI) in den „St." Spitzer's vorkommt.

7.

Wären meine Formeln (IV) zur Zeit, als Spitzer seine „St." zusammenschrieb, schon gedruckt gewesen, so dass er auch diese hätte aufnehmen und in sein „geistiges Eigenthum" verwandeln können, so wäre er, um sich rücksichtlich der in der „Presse" ihm gestellten Aufgabe (Art. 1) aus der Schlinge zu ziehen, nicht in die „peinliche" Lage gekommen, den harmlosen Zeitungsleser mit der folgenden unvergleichlichen Erklärung bedienen zu müssen:

„Nur noch kurz, was die mir von Ihnen gestellte Aufgabe, eine Differentialgleichung zweiter Ordnung vollständig zu integriren, betrifft, scheinen Sie wirklich glauben machen zu wollen, dass Sie meine Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen nicht gelesen haben, denn dort finden Sie im §. 14 des ersten Abschnittes diese Aufgabe ohnehin schon gelöst."

Der Leser weiss bereits, was in diesem §. 14 steht und was nicht darin steht; Spitzer beruft sich auf denselben, um überhaupt den Lesern der „Presse" etwas weiss zu machen und zugleich den Kern der Frage: die Integration durch blosse Quadraturen und durch Formeln, die erweislich Spitzer's „geistiges Eigenthum" sind, zu verschweigen. Dasselbe thut er auch im „Anh.", wo er den heissen Brei — jene völlig entscheidende Frage — auch nur von Ferne zu berühren sich wohl hütet, insbesondere aber, wo er über die ihm aufgegebene Integration der Differentialgleichung

$$12xy''+(7-12x)y'+800y=0 \qquad \ldots (29)$$

zu sprechen und endlich mit seiner Lösung an das Licht zu treten sich bemüssigt sieht. Er gibt wörtlich Folgendes zum Besten:

„Nach der von mir gelehrten Methode müsste man daher, wollte man das von Winckler so ungemein ungeschickt gewählte Beispiel auflösen, zuerst:

$$y = e^x \cdot \frac{d^{68}}{dx^{68}} (e^{-x} Y)$$

setzen, dann

$$Y = x^{\frac{821}{12}} . Z$$

und endlich

$$Z = e^x . \frac{d^{67}}{dx^{67}} (e^{-x} . Z_1')$$

woselbst

$$Z_1 = C_1 \int_0^1 e^{ux} u^{-\frac{1}{4}} (1-u)^{-\frac{1}{3}} du + C_2 x^{-\frac{5}{12}} \int_0^1 e^{ux} u^{-\frac{2}{3}} (1-u)^{-\frac{3}{4}} du$$

ist. Das von mir aufgestellte Integral hat einen Sinn, lässt sich auch leicht in unendliche convergente Reihen entwickeln, die von Winckler aufgestellten Integrale sind sinnlose Formeln, die der vorgelegten Gleichung nicht einmal genügen."

Abgesehen davon, dass $Z_1$ wieder nichts anderes als das Petzval-Weiler'sche Integral (15), also Spitzer nicht „eigenthümlich" ist, frage ich, stellt dieser Wust von auszuführenden Rechnungsoperationen, resp. von $68+67+1=136$ Differentiationen die Function $y$ durch blos zwei einfache bestimmte Integrale, durch reine Quadraturen dar? Der Augenschein lehrt, dass dies der Fall nicht ist. Ohne die Ausführung der 136 Differentiationen, von welchen Spitzer sogar sagt, „sie seien nicht im geringsten complicirter als die Erhebung eines Binoms zur 68. Potenz", die derselbe aber ebensowenig als sonst Jemand wirklich ausführen wird, ist $y$ in jener Form jeder Discussion unzugängig und wäre es nach Ausführung jener Differentiationen wegen der unübersehbaren Menge von Gliedern noch weit mehr. Selbst die Entwicklung in „unendliche convergente Reihen" hat Spitzer, obgleich er sie als leicht bezeichnet, anzugeben wohlweislich unterlassen. Der „Sinn", welchen er seiner Auflösung

zuschreibt, geht an dem Unsinn ihrer, jeder weitern Behandlung spottenden Form zu Grunde. Aber das Beispiel war (für Spitzer) gar so „ungemein ungeschickt gewählt"!

Wenn, wie dies bei (29) der Fall ist, das Integral $y$ einer Differentialgleichung sich überhaupt in sogen. geschlossener Form nicht darstellen lässt, und wenn nicht dessen mehr oder weniger angenäherte Berechnung, sondern seine Relation zu anderen Integralen Gegenstand einer Untersuchung ist, so muss $y$ in der compendiösen Form eines, resp. zweier bestimmten Integrale, der unübersichtlichen (27) einer doppelten Reihe höherer Differentialquotienten vorgezogen werden, und dieser Gesichtspunct war es, der, wie schon im Vorwort bemerkt wurde, meine drei Abhandlungen veranlasst hat.

Was nun meine Auflösung der Gleichung (29) betrifft, so ergeben sich aus der Vergleichung mit (21) die Werthe:

$$k_0 = -\frac{1}{2} \quad , \quad k = \frac{7}{24} \quad , \quad l_0 = 0 \quad , \quad l = \frac{200}{3}$$

und findet man:

$$\alpha = -\frac{200}{3} \quad , \quad \beta = \frac{269}{4}$$

Wird z. B. $x$ als reell und positiv angenommen, so ist

$$\lambda = x \quad , \quad \mu = 0 \quad , \quad \lambda_0 = 1 \quad , \quad \mu_0 = 0$$

ferner

$$k_0 - \sqrt{k_0^2 - l_0} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = -1, \text{ also } Q = e^x$$

und kann

$$\sigma = -1 \quad , \quad \tau = -1$$

gesetzt werden.

Aus (IV) folgt also:

$$y_1 = e^x \int_0^\infty e^{-(1+\sqrt{-1})xu} \cdot u^{\frac{265}{4}} \left[ \frac{1}{1+\sqrt{-1}} - u \right]^{-\frac{203}{3}} . du \,.. (30)$$

Durch ein Versehen blieb beim Druck meiner frühern, im Vorwort angeführten Schrift der Factor $Q = e^x$ aus. Spitzer hat es, in Ermangelung besserer Gründe, nicht verschmäht, im „Anh." aus diesem Druckfehler, der sich, weil (30) ein blosses Zahlenbeispiel von (IV) ist, sofort erkennen lässt — etwas Capital zu schlagen.

An diesem Integral — und einem analogen für $y_2$, welches ich der Kürze wegen nicht herschreibe — übt Spitzer die folgende Kritik:

„Setzt man in demselben*)

$$u = \frac{v}{1+\sqrt{-1}}$$

so geht es über in

$$y_1 = (e^x) \int_0^{(1+\sqrt{-1})\infty} e^{-vx} v^{\frac{265}{4}} (1-v)^{-\frac{203}{3}} dv \quad \ldots (31)$$

Von diesem Integrale, welches unter andern merkwürdigen Eigenschaften vornehmlich die hat, der vorgelegten Gleichung nicht zu genügen, behauptet Winckler, dass es ein endliches, allen Anforderungen streng genügendes, particuläres Integrale der obigen Differentialgleichung ist." Dann weiter: „Woher weiss Winckler, dass dieses Integrale einen endlichen Werth hat. Und woher weiss Winckler, dass es der vorgelegten Gleichung genügt? Mir kommen diese Integrale vor, als wären sie mathematische Missgeburten . . ." Ich muss mich zunächst dagegen verwahren, dass „dieses Integral", nämlich (31), das von mir aufgestellte (30) sei, denn (31) ist in der That eine „mathematische Missgeburt", die Simon Spitzer selbst auf die Welt gesetzt hat. Ich habe nicht von dem Integral (31) zu sprechen, sondern von (30), und dass dieses der Gleichung (29) genügt, lehrt einfach die Probe. Diese trifft allerdings ohne den Factor $e^x$ nicht zu; dass dieser Factor ausgeblieben ist, hat der Herr Spitzer ohne Zweifel selbst herausgebracht, davon aber nichts erwähnt, weil er sonst mit dem Druckfehler kein Geschäftchen hätte machen können. — Die weitere Frage, woher ich wisse, dass das Integral (30) ein endliches sei, kann ich nicht genau beantworten. Irgendwo habe ich es gelernt, was jeder Anfänger, — mit offenbarer Ausnahme Spitzer's, des Professors der höhern Mathematik an der Wiener technischen Hochschule, der jene insipide Frage an mich stellt, — weiss und wissen muss, dass nämlich ein bestimmtes Integral, wie (30)

*) Ich corregire hier den Druckfehler, indem ich den ausgebliebenen Factor $e^x$, mit einer Klammer umgeben, beifüge.

zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ einen endlichen Werth hat, wenn, wie dort, unter dem Zeichen ein Product steht, wovon der eine Factor $e^{-(1+\sqrt{-1})xu}$ im Exponenten einen negativen reellen Theil hat, und der andere Factor $u^m\left[\frac{1}{1+\sqrt{-1}}-u\right]^n$, worin $m$ positiv, $n$ positiv oder negativ ist, für keinen reellen und endlichen Werth von $u$ unendlich gross werden kann, — weil bekanntlich reelle und imaginäre Grössen sich nicht aufheben können. Wer in dergleichen Dingen seine Unkenntniss so unbewusst zur Schau trägt, der laborirt auch an anderen Gebrechen: et his principiis via ad — minora sternitur!

In der That kann eine Substitution, wie die von Spitzer in $y_1$ gemachte: $u=\frac{v}{1+\sqrt{-1}}$ nur einem Rechner einfallen, der nicht einmal weiss, dass imaginäre Substitutionen, durch welche nicht selten bestimmte Integrale ihre Bedeutung verändern oder verlieren, im Allgemeinen nicht zulässig sind. Das Integral z. B.

$$\int_0^{\infty\sqrt{-1}}\frac{dv}{1-v^2}$$

hat — Spitzer sieht dies vielleicht selbst ein — an und für sich keinen Sinn, aber ganz albern wäre es, wenn daraus geschlossen würde, dass auch das Integral

$$\sqrt{-1}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2}$$

welches aus ersterm durch die Substitution $v=u\sqrt{-1}$ erhalten wird, für das durch die Grenzen gegebene reelle Intervall von $u$ keinen Sinn habe. Und genau diesen Schluss hat Spitzer in seiner Auslassung bezüglich meines Integrals $y_1$ gemacht!

8.

Der zweite der im Art. 2 unterschiedenen Fälle findet statt, wenn die ursprüngliche Veränderliche nur im zweiten und dritten Coëfficienten der Gleichung (1) vorkommt, wie in den §§. 28—32 der „St." und im Art. 4 meiner Abhandlung (A) angenommen wird.

Petzval zeigt im I. B., S. 50 und 51 seines Werkes, dass der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 x + b_1)\frac{dy}{dx} + (a_2 x + b_2) y = 0$$

oder, was dasselbe ist, der transformirten Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b_1 x \frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

wenn $A = \frac{a_0}{b_1} + \frac{b_0{}^3}{b_1{}^2}$ und $b_1$ positiv sind, das allgemeine Integral entspricht:

$$y = C_1 \int_0^{-\frac{b_0}{b_1}} (b_1 u + b_0)^{A-1} e^{u\left(x - \frac{b_0}{b_1}\right) + \frac{u^2}{2b_1}} du$$

$$+ C_2 \int_0^{\infty \sqrt{-1}} (b_1 u + b_0)^{A-1} e^{u\left(x - \frac{b_0}{b_1}\right) + \frac{u^2}{2b_1}} du$$

$$+ C_3 \int_0^{-\infty \sqrt{-1}} (b_1 u + b_0)^{A-1} e^{u\left(x - \frac{b_0}{b_1}\right) + \frac{u^2}{2b_1}} du$$

vorausgesetzt, dass zwischen den Constanten die Bedingungsgleichung:

$$C_1 + C_3 + C_2 = 0$$

stattfindet.

Auf S. 33 der „St." findet Spitzer, dass der Gleichung

$$a_2 y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0 \qquad \ldots (32)$$

wenn (s. Seite 34 der „St."):

$$a_2 = b_1 n, \qquad a_1 = b_1 (m - n\alpha)$$
$$a_0 = b_1 (A - m\alpha), \qquad b_0 = -b_1 \alpha$$

gesetzt und angenommen wird, es seien $A$ und $n$ positiv, das allgemeine Integral

$$y = C_1 \int_\alpha^{+\infty \sqrt{-1}} (u - \alpha)^{A-1} e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2} du$$
$$+ C_2 \int_\alpha^{-\infty \sqrt{-1}} (u - \alpha)^{A-1} e^{u(m+x) + \frac{n}{2} u^2} du \qquad \ldots (33)$$

entspricht.

Offenbar ist dieses ganz dasselbe wie jenes im Werke Petzval's (man braucht nur $C_3$ zu eliminiren, um sich von der Identität zu überzeugen), aber Spitzer verschweigt es abermals, dass diese Formeln, deren nähere Untersuchung nicht hieher gehört, schon früher bekannt und gedruckt waren; — er verwandelt sie dadurch in sein „geistiges Eigenthum". Auf diesen Vorhalt öffnet Spitzer die bekannte Hinterthür: „Ich habe in meinen „St." Petzval's Werk oft citirt, kein ehrlicher Mensch hat mir bisher noch . . ." In der That, Spitzer hat Petzval's Werk überall citirt, wo er dessen Verfasser glaubte bekriteln zu können, aber dafür kein Wort gefunden, dass er die erwähnten Formeln jenem Werke entnommen hat! Spitzer hat wieder „ehrlich citirt" — „mit Quellenangabe, wie ich es gewöhnlich zu thun pflege und wie es allgemein Brauch in der wissenschaftlichen Welt ist" („Anh." S. 170). Glücklicherweise sind diese Citirkünste noch nicht allgemeiner Brauch in der wissenschaftlichen Welt.

Ganz ebenso verhält es sich in dem folgenden Fall. Petzval gibt S. 52 seines Werkes als Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - b_1 x \frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

für den Fall, dass jetzt $A = -\frac{a_0}{b_1} - \frac{{b_0}^3}{{b_1}^2}$ und $b_1$ positiv seien, den Ausdruck:

$$y = C_1 \int_{-\infty}^{\frac{b_0}{b_1}} (b_0 - b_1 u)^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2b_1} + u\left(x - \frac{b_0}{{b_1}^2}\right)} du$$

$$+ C_2 \int_{\frac{b_0}{b_1}}^{+\infty} (b_0 - b_1 u)^{A-1} e^{-\frac{u2}{2b_1} + u\left(x - \frac{b_0}{{b_1}^2}\right)} du$$

Spitzer dagegen gibt, S. 32 der „St.", für den Fall, dass in seiner oben angeführten Bezeichnung $A$ positiv und $n$ negativ ist, für das allgemeine Integral der Gleichung

$$a_2 y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

den Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
y = C_1 \int_{\alpha}^{+\infty} (u-a)^{A-1} \,.\, e^{u(m+x)+\frac{n}{2}u^2} du \\
+ C_2 \int_{\alpha}^{-\infty} (u-a)^{A-1} \,.\, e^{u(m+x)+\frac{n}{2}u^2} du
\end{aligned}
\quad \ldots (34)
$$

Es versteht sich ganz von selbst, dass auch dieses Resultat sachlich mit jenem zusammenfällt, welches vorhin aus dem Petzval'schen Werke angeführt wurde, aber Spitzer verschweigt es abermals, dass er längst bekannte Resultate in einer leichten Verkleidung als eigene Erfindung aufgeführt hat — ohne das geringste Neue hinzuzufügen; er hat abermals „ehrlich citirt".

Wie man sieht, stellen die Formeln (33) und (34), auf welche Spitzer nicht den mindesten Anspruch hat, das allgemeine Integral der Gleichung (32) nur für den einzigen Fall dar, wenn $A$ positiv ist. Um auch das Geringfügigste anzuführen, was in den „St." hinsichtlich blosser Quadraturen zu finden ist, bemerke ich, dass daselbst für den Fall, wenn $A$ negativ, ein Integral

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} (u-\alpha)^{A-1} e^{u(m+x)+\frac{n}{2}u2} du
$$

vorkommt, welches aber, wie Spitzer selbst bemerkt, unbrauchbar, weil unendlich ist und dass auch noch ein anderes von der Form:

$$
\int_{-\infty\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}} (u-\alpha)^{A-1} e^{u(m+x)+\frac{n}{2}u^2} du
$$

dort Parade macht. — Auch sei erwähnt, dass Spitzer weiterhin, S. 34, die in Rede stehende Differentialgleichung auf das genaueste so, wie Weiler in „Crelle's Journal" Bd. 51, S. 128, aber wieder ohne „Quellenangabe", mittelst der Substitutionen:

$$
y = e^{\alpha x} . z \quad , \quad \xi = (x + n\alpha)^2
$$

transformirt und dadurch zu der ebenfalls von Weiler hergestellten Form

$$4n\xi\frac{d^2z}{d\xi^2}+2(\xi+n)\frac{dz}{d\xi}+Az=0$$

gelangt, die nun Spitzer wieder nach der Petzval-Weiler'schen Formel (15) integrirt, aus welcher das Integral

$$z=C_1\int_0^{-\frac{1}{2n}}e^{u\xi}u^{\frac{A}{2}-1}\left(u+\frac{1}{2n}\right)^{-\frac{A+1}{2}}du$$

$$+C_2\sqrt{\xi}.\int_0^{-\frac{1}{2n}}e^{u\xi}u^{\frac{A}{2}-1}\left(u+\frac{1}{2n}\right)^{-\frac{A}{2}}du$$

folgt, das aber nur gilt, wenn $A$ zwischen 0 und 1 liegt, und weder Null noch 1 ist. Die hierin vorkommenden particulären Integrale habe ich gelegentlich im Art. 4 meiner Abhandl. (A) direct aus den Euler'schen Grundformeln abgeleitet und als „in etwas anderer Form längst bekannte Integrale" bezeichnet, dieselben also nicht, wie Spitzer denuncirt, für meine Erfindung ausgegeben. (Siehe Schluss dieses Art.)

Der Leser kennt nun Alles, was die „St." bezüglich der Integration der Gleichung (32) in Form blosser Quadraturen enthalten und weiss, dass alle von Spitzer angewandten Transformationen der Differentialgleichung und alle zur Integration benutzten Formeln, immer ohne jegliches Citat, durchaus den Schriften von Petzval und Weiler entlehnt sind. Genau so weit als diese geht auch Spitzer, der desshalb für negative $A$ schon keine Lösung in jener Form mehr zu finden weiss, und in Ermangelung eines dazu führenden Gedankens wieder zu der Ausrede greift, „dass man mittelst der Laplace'schen Methode nicht in jedem Falle das vollständige Integrale der Gleichung (32) anzugeben vermag". Darauf wird dann, wie immer, wenn es mit einfachen bestimmten Integralen nicht mehr gehen will, d. h. wenn das Petzval-Weiler'sche Integral den Dienst versagt und in anderen Schriften sich nichts mehr „erforschen" lässt, wieder die mehrmals erwähnte — Brücke des §. 14 der „St." bestiegen, wonach die Integrale in der abstrusen Form (27) durch zwei successive Differentiationen höherer Ordnung darzustellen wären. Fertige Resultate gibt Spitzer auch hier nicht.

War nun derselbe nicht im Stande die Gleichung (32) allgemein durch je zwei einfache bestimmte Integrale aufzulösen, so ist dies doch von mir durch Formen geschehen, welche mit den „mathematischen Missgeburten", als welche allerdings einige der vorhin angeführten Integrale zu betrachten sind, nichts gemein haben.

In meiner Abhandl. (A) wird in (1), dem vorliegenden Fall entsprechend, $H_0 = 0$, $H = 1$ und

$$K_0 t + K = K_0 x + \frac{L_0}{2K_0}.$$

ferner

$$k_0 = K_0 \quad , \quad k = \frac{L_0}{2K_0} \quad , \quad l = \frac{1}{2}\left(\frac{L_0}{K_0}\right)^2 - K \cdot \frac{L_0}{L} + L$$

gesetzt, wodurch die Gleichung (1) in:

$$y'' + 2(k_0 x + k) y' + (2 k_0 k x + l) y = 0 \qquad \ldots (35)$$

übergeht.

Man setze:

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{k^2 - l}{4k_0} \quad , \quad \beta = -\frac{k^2 - l}{4k_0} \quad ; \quad x^2 = \lambda + \mu\sqrt{-1}$$

$$k_0 = \lambda_0 + \mu_0 \sqrt{-1} \quad , \quad \gamma = \sigma + \tau\sqrt{-1}$$

und bestimme wieder die zwei constanten Zahlen $\sigma$ und $\tau$ in der Art, dass $\lambda\sigma - \mu\tau$ negativ und $\mu_0\sigma - \lambda_0\tau$ von Null verschieden wird.

Da hier $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ ist, so sind die beiden Fälle zu unterscheiden, ob der reelle Theil von $\alpha$ oder jener von $\beta$ positiv ist.

In meiner erwähnten Abhandlung sind die particulären Lösungen auch der Gleichung (35) durch bestimmte Integrale zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ dargestellt; in der Abhandl. (C) habe ich je eine dieser Lösungen in einer andern Form ausgedrückt, die ich im Folgenden ebenfalls anführen werde.

1. Wenn der reelle Theil von $\alpha$ positiv ist, so liegt jener von $\beta$ unter $\frac{1}{2}$ und kann positiv oder negativ sein.

Man wähle eine positive ganze Zahl $m$ so gross, dass der reelle Theil von $\rho = m - \alpha$ grösser als 1 wird, und berechne damit den Ausdruck:

$$f(t) = t^m + m\frac{1-2\alpha}{2}t^{m-1} + m(m-1)\frac{(1-2\alpha)(3-2\alpha)}{2.4}t^{m-3} + \dots$$
$$+ m(m-1)..1.\frac{(1-2\alpha)(3-2\alpha)\dots(2m-1-2\alpha)}{2.4\dots 2m}$$

dann sind

$$y_1 = xe^{-kx-k_0'x^2}\int_0^\infty e^{\gamma x^2 u} u^{\alpha-\frac{1}{2}}(\gamma u - k_0)^{\beta-\frac{1}{2}} du$$
$$\dots (VII)$$
$$y_2 = xe^{-kx}\int_0^\infty e^{\gamma x^2 u} u^\rho (\gamma u + k_0)^{-\frac{1}{2}-\rho} f[-x^2(\gamma u + k_0)] du$$

particuläre Integrale der Gleichung (35).

2. Wenn der reelle Theil von $\beta$ positiv*) ist, so liegt jener von $\alpha$ unter $\frac{1}{2}$ und kann positiv oder negativ sein. Man wähle eine positive ganze Zahl $n$ so gross, dass der reelle Theil von $\rho = n - \beta$ grösser als 1 wird und berechne damit die Function:

$$f(t) = t^n + n.\frac{1-2\beta}{2}t^{n-1} + n(n-1).\frac{(1-2\beta)(3-2\beta)}{2.4}t^{n-2} + \dots$$
$$+ n(n-)..1.\frac{(1-2\beta)(3-2\beta)\dots(2n-1-2\beta)}{2.4\dots 2n}$$

Dann leisten die Ausdrücke:

$$y_1 = xe^{-kx}\int_0^\infty e^{\gamma x^2 u} u^{\beta-\frac{1}{2}}(k_0 + \gamma u)^{\alpha-\frac{1}{2}} du$$
$$\dots (VIII)$$
$$y_2 = xe^{-kx-k_0x^2}\int_0^\infty e^{\gamma x^2 u} u^\rho (k_0 - \gamma u)^{-\frac{1}{2}-\rho} f[x^2(k_0 - \gamma u)] du$$

der Gleichung (35) Genüge.

*) In der Abhdl. (C) steht in Folge eines Versehens „negativ".

Wieder nicht ein einziges dieser Integrale (VII) und (VIII) kommt in den „St." vor.

Uebrigens hatte die in meiner frühern Schrift enthaltene Hinweisung auf die hier oben charakterisirte Behandlung des vorliegenden Falles in den „St." den Erfolg, dass der früher blos 6 Seiten betragende Umfang in der neu erschienenen Wiedergabe derselben auf nicht weniger als 34 Seiten angewachsen ist. Auf diesen Erfolg lege ich indessen umsoweniger einen Werth, als trotz der dort gehäuften Formeln, die durch (VII) und (VIII) gegebene vollständige Lösung des Problems nicht erreicht ist.

Schliesslich noch die Bemerkung, dass in meiner Abhandl. (A) für den sehr beschränkten Fall, in welchem die reellen Theile von $\alpha$ und $\beta$ gleichzeitig positiv sind, auch die particulären Integrale

$$y_1 = e^{-kx-k_0x^2}\int_0^1 e^{k_0x^2u}\,.\,u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du$$

$$y_2 = xe^{-kx-k_0x^2}\int_0^1 e^{k_0x^2u}u^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-u)^{\beta-\frac{1}{2}}du$$

von welchen oben gelegentlich der Formel für $z$ die Rede war, direct aus den Euler'schen Grundformeln — nicht etwa nach der sogen. Laplace'schen Methode, resp. den Formeln von Petzval und Weiler — abgeleitet, zugleich aber ausdrücklich als nicht zu meinen Lösungen gehörig und als längst bekannt bezeichnet worden sind.

9.

Der dritte und letzte der im Art. 2 unterschiedenen Fälle findet statt, wenn die ursprüngliche Veränderliche nur im dritten Coëfficienten der Differentialgleichung (1) vorkommt, wie in den §§. 33 und 34 der „St." und im Art. 2 meiner Abhandl. (A) angenommen ist. Nun hat Weiler, (Crelle, B. 51, S. 128) gezeigt, dass die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+(a_2x+b_2)y=0 \qquad \ldots (36)$$

von $\frac{dy}{dx}$ dadurch befreit werden kann, dass man

$$y = e^{-\frac{a_1}{2}x} \cdot z$$

setzt, wodurch dieselbe die Form

$$\frac{d^2z}{dx^2} = (ax + b)z \qquad \ldots (37)$$

erhält. Wird nun, wie dies Scherk (Crelle, B. 10, S. 92) thut:

$$ax + b = a^{\frac{2}{3}} \cdot \xi$$

gesetzt, so geht die Gleichung in:

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} = \xi z$$

über, deren Integral Jacobi in demselben Bande wie folgt:

$$z = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \left[ C_1 e^{u\xi} + C_2 \rho e^{\rho u \xi} + C_3 \rho^2 e^{\rho^2 u \xi} \right] du$$

dargestellt hat. Darin bedeutet $\rho$ eine primitive Wurzel der Gleichung $\rho^3 = 1$ und müssen die Constanten der Bedingungsgleichung $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ genügen. Aus $z$ ergibt sich das allgemeine Integral $y$ von (36), womit die Sache erledigt ist. Spitzer indessen hat es sich noch bequemer gemacht und die erforderliche Rechnung sammt Resultat beinahe buchstäblich aus dem Werke Petzval's „verwerthet". Im I. Bd. dieses Werkes, S. 53, wird nämlich von der auf die Form:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

gebrachten Gleichung (36) ausgegangen und als Integral der Ausdruck

$$y = C_1 \int_0^{-\infty} e^{u\left(x + \frac{a_3}{b_0}\right) + \frac{u^3}{3b_0}} \cdot du + C_2 \int_0^{\infty(-1+\sqrt{-3})} e^{u\left(x + \frac{a_0}{b_0}\right) + \frac{u^3}{3b_0}} \cdot du$$

$$+ C_3 \int_0^{\infty(-1-\sqrt{-3})} e^{u\left(x + \frac{a_0}{b_0}\right) + \frac{u^3}{3b_0}} \cdot du$$

mit der Bedingung: $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ angegeben.

In den „St." Seite 38 wird die Gleichung (36) in der Form

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + (a_0 + x)y = 0 \qquad \ldots (38)$$

geschrieben, in welche sich jene Petzval's sofort bringen lässt, wenn man $e^{kx}.y$ für $y$ setzt. Nun befolgt Spitzer, in alle Fussstapfen Petzval's tretend, den a. a. O. von Letzterm eingeschlagenen Gang der Rechnung und findet für (38) das Integral:

$$y = C_2 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2}u^2 + \frac{a_2}{3}u^3} . du + C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2}u^2 + \frac{a_2}{3}u^3} , du$$
$$+ C_3 \int_0^{\mu_3 \infty} e^{u(a_0+x) + \frac{a_1}{2}u^2 + \frac{a_2}{3}u^3} . du \qquad \ldots (39)$$

„worin $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ dritte Wurzeln der Einheit bedeuten, und $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ ist".

Davon, dass die Rechnung Petzval ent—nommen ist, sagt Spitzer kein Wort; er „citirt ehrlich" und sagt, dieselbe sei nach der Laplace'schen Methode ausgeführt; nur bezüglich der Einführung der imaginären Grenzen wird beigefügt, „ich folge hiebei Petzval's Vorgang."

In meiner frühern Schrift bemerkte ich: „Abgesehen davon, dass hier Spitzer abermals nicht das Geringste selbst geleistet, ist diese Form wegen der imaginären Grenzen sicherlich keine verbesserte Darstellung der von Scherk, resp. Jacobi viel früher veröffentlichten Auflösung." Hierdurch, vielleicht zum erstenmale, darauf aufmerksam gemacht, dass gegen solche Grenzen sich manchmal Einiges sagen lasse, führt nun Spitzer im „Anh." (S. 154) folgendes — jeder nähern Bezeichnung entrückte — Stückchen aus. Er sagt: „Petzval hat nie die obenstehende Gleichung integrirt", was, wie der Leser nun weiss, eine — Unwahrheit ist. Er sagt weiter: „Ich habe in meinen „St." für die Gleichung (38) nachstehendes Integral gefunden:

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \Big[ C_1 \mu_1 e^{(a_0+x)\mu_1 u + \frac{a_1}{2}\mu_1^2 u^2} + C_2 \mu_2 e^{(a_0+x)\mu_2 u + \frac{a_1}{2}\mu_2^2 u^2} \qquad \ldots (39^1)$$
$$+ C_3 \mu_3 e^{(a_0+x)\mu_3 u + \frac{a_1}{2}\mu_3^2 u^2} \Big] du$$

Dass dieses Integral in den „St." stehe, ist abermals eine — Unwahrheit! Dieses Integral, welches sich, trotz der formellen Aehnlichkeit, von (39) immerhin unterscheidet, ist eine von Spitzer erst im „Anh." mittelst imaginärer Substitution gemachte Umformung; es ist die oben angeführte Lösung von Scherk, resp. Jacobi, worüber jedoch sowohl in den „St." als im „Anh." mit absolutem Schweigen hinweggegangen wird! Erst S. 175 des „Anh." kommt Spitzer auf die Gleichung (38) — aber ja nicht auf die vorigen Integrale — zurück, wahrscheinlich in der Hoffnung, der Leser habe jetzt auf dieselben schon vergessen. Er sagt: „Winckler kommt dann zur Besprechung der Gleichung (38), welche ich wieder nach der Laplace'schen Methode integrirte (durch Annexion der Rechnung Petzval's), und von welcher Winckler wieder findet, dass Andere vor mir, nämlich Petzval, Scherk, Jacobi dasselbe gethan. Ich habe diese Männer (!) auch alle in meinen „St." genannt. Der Vorwurf Winckler's ist daher vollkommen unmotivirt und dies umsomehr, als ich nie in meinem Leben behauptet habe, dass die Laplace'sche Methode von Jemand Anderm als von Laplace herrührt."

Wieder die bekannte Citirpraktik! Spitzer hat die „Männer" Scherk und Jacobi in der Einleitung zu den „St.", genannt, am gehörigen Ort aber, bei den betreffenden Resultaten deren Namen mit handgreiflicher Absicht verschwiegen! Ich sage: mit Absicht, weil er sogar noch im „Anh." (s. obiges Citat) das Scherk-Jacobi'sche Integral ($39^1$) als von ihm (Spitzer) gefunden zu bezeichnen, — die Ungenirtheit besitzt.

Ein ganz besonderer Schlich der Citirpraktik Spitzer's besteht in der unausgesetzten Berufung auf die „Laplace'sche Methode", die zur Gewinnung „geistigen Eigenthums" vortrefflich passt. Wenn Spitzer, wie oben und in früheren Fällen, Rechnungen und Resultate aus den Schriften von Jacobi, Petzval, Weiler etc. abgeschrieben hat, so sagt er: „ich habe sie nach der Laplace'schen Methode berechnet"; so etwas begründet bei Nichtkennern allerlei vermeintliche Ansprüche auf jene Rechnungen und Resultate, die dann Spitzer mit gehöriger Courage weiterhin ganz für sein Eigenthum zu erklären pflegt.

Welche Bewandtniss es mit der „Laplace'schen Methode" für lineare Gleichungen zweiter Ordnung hat, wurde schon früher, Art. 2 angedeutet; ich habe dort bemerkt, dass Laplace nur von dem besondern Fall handelt, wenn die Coëfficienten der Gleichung lineare Functionen sind und dass dabei die Euler'sche Form des Integrals geradezu vorausgesetzt wird. Es ist hier der Ort, dies näher zu zeigen. In der a. a. O. erwähnten Abhandlung der Histoire (Année 1782, Paris 1785) sagt Laplace: „ . . . considérons l'équation différentielle

$$0=(a+bx)y+(a_1+b_1x)\frac{dy}{dx}+(a_2+b_2x)\frac{d^2y}{dx^2}$$

si l'on suppose

$$y=\int e^{-xu}\varphi(u)\,du$$

on aura . . ." Hierdurch ist der Standpunct der „Laplace'schen Methode" vollständig charakterisirt. Wenn Spitzer („Anh." S. 167) sagt, Laplace habe zu der gegebenen Differentialgleichung das Integral gesucht, Euler aber, umgekehrt, die Gleichung aufgesucht, welcher jenes als gegeben betrachtete Integral Genüge leistet, so ist dies eine willkürliche Darstellung des Sachverhaltes. Laplace setzt, genau wie Euler (Calc. integr. Cap. X. Probl. 132), die Form des Integrals voraus und sucht auf dieselbe Art, wie Euler die entsprechende Function $\varphi(u)$. Laplace supponirt wie Euler, dass die Variable $x$ nur in einem Factor, und zwar in der Form $e^{-xu}$ vorkomme und dies ist das Wesentliche, wodurch alles Andere bestimmt ist, namentlich auch derselbe Ausdruck für $\varphi(u)$ sich ergibt, den Euler gefunden hat. Dass Laplace zuerst die Gleichung und dann das Integral hingeschrieben hat, ändert nichts an der Methode; dies konnte — mit aller Zuversicht — geschehen, weil der Zusammenhang zwischen jener Gleichung und jener Form des Integrals durch Euler lange vorher schon aufgedeckt war. Wie kann da von einer besondern Laplace'schen Methode die Rede sein?

Die von Spitzer — natürlich seiner Citirzwecke wegen — sogenannte Laplace'sche Methode, die kein Mathematiker als solche kennt und kennen kann, rührt also in der That nicht

von Laplace, sondern von Euler her. — Was Laplace geleistet hat, besteht in der Bemerkung, dass die oben vorausgesetzte Form des Integrals auch noch Gleichungen höherer Ordnung mit blos linearen Coëfficienten, von welchen übrigens hier die Rede nicht ist, im Allgemeinen genügen könne.

Ich kehre zu dem frühern Gegenstand zurück.

Um auch das Unbedeutendste anzuführen, was Spitzer in Hinsicht der Integration durch Quadraturen in seine „St." aufgenommen hat, sei bemerkt, dass er S. 39—40 findet, „die Gleichung (38) gestattet ebenfalls noch eine andere Behandlungsweise". Er setzt nach Weiler, wie dies oben schon geschah:

$$y = e^{-\frac{a_1}{2a_2}x} . z$$

und erhält die Gleichung:

$$a_2 \frac{d^2z}{dx^2} + (a_0 - \frac{a_1^{\,2}}{4a_2} + x) z = 0$$

aus welcher man, wenn wieder nach Weiler (Crelle B. 51. S. 128)

$$\xi = (a_0 - \frac{a_1^{\,2}}{4a_2} + x)^{\frac{3}{2}}$$

gesetzt wird, die folgende:

$$\xi \frac{d^2z}{d\xi^2} + \frac{1}{3} . \frac{dz}{d\xi} + \frac{4}{9a_2} . \xi z = 0 \qquad \ldots (40)$$

findet. Diese Reduction der Gleichung (38) auf die Form (40), oder also auf den ersten Fall der Gleichung (1), ist von Weiler, mittelst der beiden von ihm angegebenen Substitutionen, nicht etwa blos zufällig, sondern mit Absicht gesucht und gefunden worden und findet sich fast buchstäblich genau auch in seiner Abhandlung (S. 129). Gleichwohl schreibt Spitzer diese Reduction sich zu, indem er („Anh." S. 155) sagt:

„Sodann integrirte ich die Gleichung (38) auf andere Weise. Ich setzte nämlich zuerst $y = e^{kx} . z$, woselbst $k = -\frac{a_1}{2a_2}$ ist, sodann setzte ich $\xi = (a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + x)^{\frac{3}{2}}$ und fand die Gleichung (40)."

Was von diesen weiteren Zugriffen zu halten, möge der Leser beurtheilen.

Indessen ist noch besonders hervorzuheben, dass früher schon Petzval, I. Bd., S. 107 seines Werkes, die noch allgemeinere Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - a^2 t^n y = 0$$

mittelst der Substitution $t = x^{\frac{n+2}{2}}$ auf die folgende:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{n}{n+2} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{4\,a^2}{(n+2)^2} \cdot xy = 0 \qquad \ldots (41)$$

also auf den ersten Fall der Gleichung (1) reducirt hat. Ist nun die Form (40) nach Weiler einmal hergestellt, so ergibt sich eine particuläre Lösung sofort aus dem Petzval'schen Integral (8). Denn aus den Gleichungen (9) und (10) folgt:

$$\alpha = -\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}\,, \quad \beta = +\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}\,, \quad A = B = \frac{1}{6}$$

daher:

$$z_1 = \int_{-\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}}^{\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}} e^{u\xi}\left(u^2 + \frac{4}{9\,a_2}\right)^{-\frac{5}{6}} du \qquad \ldots (42)$$

Die zweite Lösung ergibt sich ebenso unmittelbar aus dem Weiler'schen Integral (14); denn aus (13) folgt $A_1 = B_1 = \frac{5}{6}$, daher:

$$z_2 = \xi^{\frac{2}{3}} \int_{-\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}}^{\frac{2}{3\sqrt{-a_2}}} e^{u\xi}\left(u^2 + \frac{4}{9\,a_2}\right)^{-\frac{1}{6}} du \qquad \ldots (43)$$

und $z = C_1 z_1 + C_2 z_2$ eine zweite Form für das allgemeine Integral von (40), welche den „St." einverleibt ist. Uebrigens hat Petzval die Gleichung (41), wovon (40) nur ein specieller Fall, nämlich für $n = 1$ ist, S. 107 des I. Bd. seines Werkes allgemein integrirt und gefunden:

$$y = C_1 \int_{-\frac{2a}{n+2}}^{\frac{2a}{n+2}} e^{xu}\left[u^2 - \frac{4\,a^2}{(n+2)^2}\right]^{-\frac{n+4}{2n+4}} du$$
$$+ C_2 \int_{\frac{2a}{n+2}}^{\infty} e^{-u\sqrt{x^2}}\left[u^2 - \frac{4\,a^2}{(n+2)^2}\right]^{-\frac{n+4}{2n+4}} du \qquad \ldots (44)$$

In der Abhandlung ($A$) bemerkte ich bezüglich meiner aus den Euler'schen Formeln abgeleiteten, nur der Form nach von (42) und (43) verschiedenen Lösungen der Gleichung (40) wörtlich: Diese beiden Integrale sind nicht neu, und, soviel mir bekannt, zuerst von Hrn. Petzval auf anderm Wege und in anderer Form gefunden worden.

Spitzer wollte hier „genannt" sein und schreibt S. 154 des „Anh." Folgendes: „Das ist mit Verlaub eine Unwahrheit! Wo steht dieses Integral in Petzval's Werk? Petzval hat nie die obenstehende Differentialgleichung integrirt.."

Was zunächst die letztere Behauptung betrifft, so habe ich ihre Unwahrheit schon früher dargethan; Petzval hat nicht nur die Gleichung (40), sondern sogar die viel allgemeinere (41) vollständig integrirt, deren Integral (44) ist; jene Behauptung ist um so — unwahrer, als sogar das von Spitzer arrogirte Integral $z_1$ in (42) aus dem ersten Gliede von (44) für $n=1$ unmittelbar und in fast buchstäblicher Uebereinstimmung hervorgeht!

Was dann weiter das zweite Integral betrifft, so ist wie $z_1$ Hrn. Petzval, so $z_2$ Hrn. Weiler zuzuschreiben, denn beide haben Alles geliefert, was zur Herstellung dieser beiden Integrale irgend erforderlich ist. Aber für diese Integrale als „geistiges Eigenthum" Spitzer's Reclame zu machen, dazu fehlte mir jeder Grund; denn hätten sie sich nicht in viel älteren Abhandlungen schon vollständig vorgefunden, so würde die ganze Leistung Spitzer's doch nur in der oben angegebenen Berechnung der Grössen $\alpha$, $\beta$ und der Werthe $A=B=\frac{1}{6}, A_1=B_1=\frac{5}{6}$ bestehen, die jeder Schüler zuwege bringt, sicherlich ohne die Prätension zu machen, es seien etwa wegen dieser Berechnung die beiden Integrale $z_1$ und $z_2$ künftighin nach ihm zu benennen. Zu welchen lächerlichen Namenlisten würde es in den wissenschaftlichen Schriften führen, wenn Jeder, der in einer allgemeinen Formel den Buchstaben specielle Zahlenwerthe substituirt hat, den Anspruch haben sollte, die betreffende specielle Formel sei mit seinem verehrten Namen zu citiren?

Ist durch das Vorangehende klargestellt, was durch Petzval und Weiler sowohl für die Transformation als Integration

der Gleichung (36) vor dem Erscheinen der „St." geleistet worden ist, so mag nun auch folgen, was Spitzer im „Anh." S. 176 hierüber sagt:

„Ich halte trotzdem meine Methode für neu, denn die Gleichung (36), welche ich durch zwei aufeinander folgende Substitutionen in die Form (15) brachte und als Specialfall der Gleichung (5) behandelte, wurde bisher weder von Petzval noch von Weiler, noch von irgend Jemand Anderm vor mir auf diese Weise behandelt, wie ich sie behandelte."

Möge der Leser selbst hierüber urtheilen! Dass „die beiden aufeinander folgenden Substitutionen" zuerst von Weiler, und zwar genau zu demselben Zweck wie von Spitzer angewendet wurden, und dass dieser die Integration wieder nur mittelst der Petzval-Weiler'schen Integralformeln, und zwar einfach durch Einsetzung specieller Zahlenwerthe ausführte, ist vorhin nachgewiesen worden: wie kann da von einer „neuen Methode" Spitzer's die Rede sein und wie kann Letzterer behaupten, die Gleichung (36) sei vor ihm von Niemandem auf die angegebene Weise behandelt worden?

Was nun aber die Ansprüche Spitzer's auf die Integrale (42) und (43) selbst betrifft, so steht es damit womöglich noch schlechter. Die Gleichung (37) ist nämlich auch ein längst erledigter specieller Fall der Riccati'schen Gleichung und schon viele Jahre vor dem Erscheinen der „St." integrirt worden. Im 17. Bd. des Journals von Crelle (1837) S. 371 wird nämlich von Lobatto und im Calcul intégr. von Moigno (1844) S. 645 u. ff. bewiesen, dass, wenn

$$m = \frac{n}{2} + 1 \text{ und } \xi = \frac{x^m}{m}$$

gesetzt wird, der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + c^2 x^n y = 0$$

der Ausdruck

$$y_1 = \int_{-c}^{+c} e^{u\xi} (c^2 - u^2)^{-\frac{m+1}{2m}} du$$

als particuläres Integral Genüge leistet, und ferner, dass noch ein zweites Integral erhalten wird, wenn man im Exponenten (von $c^2-u^2$) unter dem Integralzeichen $-m$ für $m$ setzt und dann $y_1$ mit $x$ multiplicirt, so dass also dieses zweite Integral*)

$$y_2 = x \int_{-c}^{+c} e^{u\xi} (c^2 - u^2)^{-\frac{m-1}{2m}} du$$

und das allgemeine Integral

$$y = C_1 \int_{-c}^{+c} e^{u\xi} (c^2 - u^2)^{-\frac{m+1}{2m}} du + C_2 x \int_{-c}^{+c} e^{u\xi} (c^2 - u^2)^{-\frac{m-1}{2m}} du$$

ist. Für die Differentialgleichung $y'' + c^2 xy = 0$ hat man $n = 1$, $m = \frac{3}{2}$ also $\xi = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ zu setzen.

Es ist daher:

$$y = C_1 \int_{-c}^{+c} e^{u\xi} (c^2 - u^2)^{-\frac{5}{6}} du + C_2 \xi^{\frac{2}{3}} \int_{-c}^{+c} e^{u\xi} (c^2 - u^2)^{-\frac{1}{6}} du$$

und dies ist offenbar das S. 40 der „St." reproducirte, aus (42) und (43) zusammengesetzte Integral, auf welches daher Spitzer — der dort über alles hier Angeführte mit absolutem Stillschweigen hinweggeht und damit jene Formeln als seine Erfindung hinstellt — auch aus diesem weitern Grunde nicht den allergeringsten Anspruch hat.

Trotz voller Kenntniss dieses Sachverhaltes und obgleich schon in meiner frühern Schrift darauf hingewiesen wurde, schreibt Spitzer S. 154 des „Anh." Folgendes:

„Ich habe die Arbeit (meine Abhandl. A) durchgesehen und habe daselbst viele alte Bekannte gefunden, die aus

---

*) Moigno drückt dies so aus: On arrivera à cette conclusion importante, que, si l'équation proposée est verifiée par une certaine valeur $y_1$ elle le sera encore pour le produit $xy_1$, pourvu que dans la valeur de $y_1$ on change $m$ en $-m$; la somme de deux intégrales particulières, obtenues comme nous venons de le dire, sera l'intégrale générale cherchée.

meinen Studien geraden Weges in die Arbeit Winckler's hinübergewandert sind und sich dort als angebliche Kinder seines Geistes präsentiren. So z. B. betrachtet Winckler die Gleichung:

$$y'' + 2ky' + (l_0 x + k^2)y = 0$$

und findet die beiden particulären Integrale:

$$y_1 = e^{-kx - \frac{2}{3} x \sqrt{-l_0 x}} \int_0^1 e^{\frac{4}{3} xu \sqrt{-l_0 x}} \left[u(1-u)\right]^{-\frac{5}{6}} du$$

$$y_2 = xe^{-kx - \frac{2}{3} x \sqrt{-l_0 x}} \int_0^1 e^{\frac{4}{3} xu \sqrt{-l_0 x}} \cdot \left[u(1-u)\right]^{-\frac{1}{6}} du$$

Er macht hiezu die nachstehende Bemerkung: „Diese beiden Integrale sind nicht neu, und soviel mir bekannt, zuerst von Petzval gefunden worden." Das ist . . . ."

Streckt hier Spitzer abermals die Finger nach den Formeln (42) und (43) aus, so wird dies Niemand mehr überraschen, aber geradezu niederschmetternd ist die Logik Spitzer's, der in einem Athemzuge sagt, ich hätte jene Formeln als Kinder meines Geistes ausgegeben, und dann wieder, ich hätte sie als nicht neu, sondern als von Petzval gefunden erklärt! —

Was nun die in meiner Abhandl. (A) gefundenen Lösungen betrifft, so habe ich die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2K\frac{dy}{dt} + (L_0 t + L)y = 0$$

mittelst der Substitution $L_0 t + L = L_0 x + K^2$ in die Form

$$y'' + 2ky' + (l_0 x + k^2)y = 0 \qquad . . . (45)$$

gebracht, eine Transformation, die, nebenbei bemerkt, in den „St." nicht vorkommt.

Setzt man allgemein $x^{\frac{3}{2}} = \lambda + \mu\sqrt{-1}$ und bestimmt, wie in früheren Fällen, zwei constante Zahlen $\sigma$ und $\tau$ so, dass $\lambda\sigma - \mu\tau$ negativ wird, so ist, $\gamma = \sigma + \tau\sqrt{-1}$ gesetzt, der reelle Theil von $\gamma x^{\frac{3}{2}}$ negativ. Wird endlich der Kürze wegen

$$P = e^{-kx - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{-l_0}}$$

gesetzt, so genügen die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= P \int_0^\infty e^{\gamma x^{\frac{3}{2}} \cdot u} \left[ u \left( \frac{4\sqrt{-l_0}}{3\gamma} - u \right) \right]^{-\frac{5}{6}} du \\ y_2 &= xP \int_0^\infty e^{\gamma x^{\frac{3}{2}} \cdot u} \left[ u \left( \frac{4\sqrt{-l_0}}{3\gamma} - u \right) \right]^{-\frac{1}{6}} du \end{aligned}\right\} \quad \ldots (46)$$

der Gleichung (45). Will man ausser der Grenze $+\infty$ auch jene $-\infty$ zulassen, so können, wie in der Abhandl. (C) gezeigt ist, ohne dass es der Zahlen $\sigma$ und $\tau$ bedarf, zwei particuläre Integrale durch die unmittelbar gegebenen Grössen dargestellt werden. Sie sind, wenn zur Abkürzung noch

$$Q = e^{-kx + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{-l_0}}$$

gesetzt wird, die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x P \int_0^{\pm\infty} e^{-x^{\frac{3}{2}} \cdot u} \left[ u \left( \frac{4}{3} \sqrt{-l_0} + u \right) \right]^{-\frac{1}{6}} du \\ y_2 &= x Q \int_0^{\pm\infty} e^{-x^{\frac{3}{2}} \cdot u} \left[ u \left( \frac{4}{3} \sqrt{-l_0} - u \right) \right]^{-\frac{1}{6}} du \end{aligned}\right\} \quad \ldots (IX)$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der reelle Theil von $x^{\frac{3}{2}}$ positiv oder negativ ist.*) Die beiden Integrale fallen mit einander zusammen, wenn $l_0 = 0$ ist. Dann reducirt sich die Gleichung (45) auf $y'' + 2ky' + k^2 y = 0$, deren Integrale $e^{-kx}$ und $xe^{-kx}$ sind.

Bezüglich der Formeln (46) leistet nun Spitzer S. 177 des „Anh." Folgendes:

„Und von diesen Formeln behauptet Winckler, dass sie von endlichem Werthe sind, und dass sie sowohl hinsichtlich

*) In der Abhandl. (C) ist bei $y_2$ das Zeichen von $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \sqrt{-l_0}$ unrichtig — statt +, also $P$ statt $Q$ angegeben.

des Ausdruckes unter dem Zeichen als der Grenzen von den von mir (schon wieder!) aufgestellten Lösungen total verschieden und wesentlich neu sind. Ich frage nun, ist das nicht offenbarer Schwindel?"

Vor Allem weise ich die Unterstellung zurück, als hätte ich irgend etwas diese Formeln Betreffendes, sei es der Ausdruck unter dem Integralzeichen, seien es die Grenzen, als von Spitzer gefunden bezeichnet; in meiner frühern Schrift war von den oben angeführten Formeln Lobatto's, und nicht von solchen Spitzer's, die nie existirt haben, die Rede. Wenn Spitzer diese Formeln Allem zum Trotz immer wieder sich selbst zuschreibt, so mag er dies thun, so lange es ihm und seinem saubern „Anhang" Vergnügen macht; ich werde mich nie dazu herbeilassen, den s. v. v. „Schwindel" mit Plagiaten weiter zu verbreiten. Wenn Spitzer nicht begreift, dass die Integrale (46) endliche Grössen darstellen, so ist dies ebenfalls seine Sache; jeder mit den Elementen der Integralrechnung vertraute Schüler begreift es, weil vermöge der Bestimmung von $\sigma$ und $\tau$ der reelle Theil des Exponenten $\gamma x^{\frac{3}{2}}.u$ immer negativ wird, was hinreicht damit das Integral, zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ genommen, einen endlichen Werth erhält. Aber gerade durch jenen Exponenten unterscheidet sich der Ausdruck unter dem Zeichen ganz wesentlich von jenem der Integrale von Lobatto, welcher im Allgemeinen die Grenze $\infty$ nicht zulässt. Dass die Integrale (46) auch hinsichtlich der Grenzen andere als jene in (42) und (43) sind, wird, — Spitzer (der das Gegentheil sagt) ausgenommen, — Jeder zugeben, welchem ausser dem physischen auch das geistige Sehvermögen nicht ganz abhanden gekommen ist.

Spitzer fährt weiter fort:

„Führt man in den Integralen (46) für $u$ eine neue Variable $v$ ein, mittelst der Substitution:

$$u = \frac{v}{\sigma + \tau\sqrt{-1}}$$

so erhält man:

$$y_1 = P.\int_0^{\infty(\sigma+\tau\sqrt{-1})} e^{vx\sqrt{x}} \left[v\left(\frac{4}{3}\sqrt{-l_0} - v\right)\right]^{-\frac{5}{6}} dv$$

$$y_2 = xP.\int_0^{\infty(\sigma+\tau\sqrt{-1})} e^{vx\sqrt{x}} \left[v\left(\frac{4}{3}\sqrt{-l_0} - v\right)\right]^{-\frac{1}{6}} dv$$

d. i. ein Ausdruck, der sich von dem von mir (schon wieder?) gegebenen blos in den Grenzen (!) unterscheidet; denn die von mir (!) aufgestellten particulären Integrale, — (42) und (43) — gehen, wenn man in dieselben für $u$ eine neue Variable mittelst der Substitution

$$u = -\frac{2}{3\sqrt{-a_2}} + v$$

einführt, in dieselben Integrale über, welche Winckler aufstellt, mit dem einzigen Unterschiede (!), dass meine (!) Integrale die Grenzen 0 und $\frac{4}{3\sqrt{-a_2}}$, die Winckler'schen Integrale aber die Grenzen 0 und $\infty\ (\sigma + \tau\sqrt{-1})$ haben.

Meine (!) Integrale haben endlichen Werth, lassen sich auch leicht in convergente Reihen entwickeln, das sind Eigenthümlichkeiten, die ihnen einen unzweifelhaften Vorzug verleihen . . ."

Um den Mangel jedes andern, wenn auch nur scheinbaren Grundes seiner Rechtfertigung zu verdecken, und als wenn, was unwahr, durch oftmalige Wiederholung wahr gemacht werden könnte, nimmt hier Spitzer viermal nacheinander die von Lobatto gefundenen Integrale für sich in Anspruch, während er früher blos seine angeblich „neue Methode" sie zu finden, als ihm geistig eigen bezeichnete.

Die Substituirerei $u = \frac{v}{\sigma + \tau\sqrt{-1}}$, mit der er seine $y_1$ und $y_2$ herstellt, ist schon früher dagewesen; auch ist es selbstverständlich, dass Spitzer über die Bedeutung der Zahlen $\sigma$ und $\tau$, ohne welche $y_1$, $y_2$ keinen Sinn haben, abermals kein Wort verliert. Er meint wohl, der „Anhang" ist ja der Schluss der „Vorlesungen" und wer einmal bis zu diesem — vorgedrungen, der ist hinlänglich reif, um auch solche Dinge sich bieten zu lassen!

Zweifelhaft aber könnte die Frage sein, ob Spitzer die Identität oder die Verschiedenheit meiner Integrale (46), resp. (IX) und der „seinigen" beweisen wollte. Indem er nämlich dem Leser zu Gemüthe führt, dass (42), (43) doch viel besser als (46) seien, da sie „endlichen Werth haben" und sich in convergente Reihen entwickeln lassen, scheint er beweisen zu wollen, dass meine Integrale von den „seinigen" verschieden sind, vergisst aber, dass er damit seine „Anklagen" selbst widerlegt. Indem er andererseits dem Leser insinuirt, meine Integrale seien doch von den „seinigen" blos in den Grenzen verschieden, scheint er, der ja auch in früheren Fällen von den Grenzen als einer unmassgeblichen Nebensache gesprochen hat, die Identität plausibel machen zu wollen, — vergessend, dass mit solchen Insinuationen ein Schüler bei der Prüfung zwar die Reprobation, aber — in der Regel — keine Lehrkanzel der Mathematik und analytischen Mechanik erlangen kann.

In diesen Zweifeln überdachte ich die Lucubration Spitzer's nochmals mit der Tendenz, sie möglichst zu dessen Gunsten auszulegen, und glaube nun, dieselbe sei, wie die Aerzte sagen, symptomatisch aufzufassen. Spitzer hat offenbar sowohl die Identität als auch die Verschiedenheit beweisen wollen, damit zwar einen Gallimathias producirt, — aber zugleich jede weitere Kritik zum Schweigen gebracht.

Ich füge zum Ueberfluss noch bei, dass weder die Formeln (46) noch jene (IX) in den „St." vorkommen und aus diesen auch nicht abgeleitet werden können.

10.

Meine Abhandlung (B), mit welcher sich das zunächst Folgende beschäftigt, hat in ihrem ersten Theil die Integration der Gleichung (2) zum Gegenstand, und zwar für den Fall, dass der Coëfficient von $\frac{d^2 y}{dt^2}$ ein vollständiges Quadrat ist. — Was Spitzer über diese Gleichung im 3. Abschn. der „St." (S. 10—11) sagt, betrifft ausschliesslich die Reduction der Gleichung:

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{d y}{d x} + a_0 y = 0 \qquad \ldots (47)$$

auf die Form (1) mit blos linearen Coëfficienten.

Diese Leistung ist aber wieder ein Plagiat*) vom reinsten Wasser, von Spitzer an Petzval verübt, der im I. B. (S. 105) seines Werkes jene Reduction an der viel allgemeinern Gleichung:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(A_1+B_1x^m)x\frac{dy}{dx}+(A_0+B_0x^m+C_0x^{2m})y=0$$

vollständig durchgeführt hat, von welcher Gleichung jene in (47) der specielle Fall für $m=-1$ und $B_0=C_0=0$ ist.

Petzval setzt zuerst $x^m=t$, Spitzer setzt $x^{-1}=\xi$.

Petzval setzt dann $y=t^k.z$, Spitzer setzt $y=\xi^k.z$.

Petzval erhält zur Bestimmung von $k$ eine quadratische Gleichung, dieselbe findet auch Spitzer (für $m=-1$, $B_0=C_0=0$). Petzval bewirkt dadurch die genannte Reduction, Spitzer natürlich auch. Petzval hat die Arbeit geliefert, — Spitzer aber hat sie den „St." einverleibt und schon dadurch in sein „geistiges Eigenthum" hinübertransformirt, dass er wieder nicht ein Wort sagt, in welchem Werke er sie „erforscht" hat; kurz, Spitzer hat wieder „ehrlich citirt, wie es in der wissenschaftlichen Welt Brauch ist."

Nach dieser Leistung vollbringt er die zweite und letzte mit den Worten: „Die (transformirte) Gleichung, welche Coëfficienten hat, die nach der unabhängig Variablen $\xi$ vom ersten Grade sind, kann nach den Methoden, die wir (!) im ersten Abschnitt unseres (!) Werkes „St. über die Differentialgleichungen" gegeben, integrirt werden."

Dies ist Alles, was Spitzer a. a. O. der „St." über die in Rede stehende Gleichung zu sagen weiss. Von irgend einer nähern Ausführung ist ebensowenig die Rede, als von der Aufstellung irgend eines Integrals jener Gleichung. Gleichwohl hat Spitzer in seinem Schreiben an die Akademie auch bezüglich des 3. Abschn. der „St." denuncirt, ich hätte in meiner Abhandl. (B) die Resultate seiner Arbeiten wiedergegeben und in den akadem. Schriften abdrucken lassen. Dies zu sagen erlaubte sich Spitzer, obgleich er wusste, dass in seiner Compilation von

---

*) Ich glaube bemerken zu müssen, dass Spitzer sich dieses Ausdrucks zuerst bedient hat. — Habeat sibi!

keinem ihm eigenen Gedanken, von keinem Resultate und ausser dem oben enthüllten Plagiat, überhaupt von keiner Arbeit Spitzer's irgend eine Spur zu finden ist! Aber damit noch nicht genug, schreibt Spitzer, auf die Unkenntniss seiner Leser vertrauend, im „Anh." (S. 157) Folgendes:

„Ich stellte die Gleichung (47) auf, führte in selbe neue Variable $\xi$ und $z$ ein mittelst der Gleichungen $\xi = \frac{1}{x}$, $y = \xi^k . z$ und erhielt eine Gleichung von der Form (5), die ich vollständig integriren lehrte (diese gelehrte Gleichung!). Winckler erwähnt auch hier meine Arbeit nicht." Spitzer glaubte wohl, dass auch ich den oben angegebenen Ursprung dieser „Arbeit" nicht kenne. Nun habe ich sie „erwähnt"; der Leser kennt sie als ein Plagiat!

Auf meinen Vorhalt, dass die Gleichung (47) in den „St." nur transformirt aber nicht integrirt und Spitzer alles Uebrige schuldig geblieben ist, entgegnet derselbe S. 178 des „Anh." mit gewohnter Unver—frorenheit:

„Ich bemerke darauf, dass dies auch vollständig genügt, und dass Winckler selber alles das that, was ich auf dieser einen Seite („St." Abschn. 3, S. 10—11) angab."

Diese wenigen Worte enthalten drei bewusste Unwahrheiten. Es ist erstens nicht wahr, dass meine (alsbald folgenden) Integrale in dem 1. Abschn. der „St.", worauf Spitzer (im 3. Abschn.) verweist, vorkommen, oder durch ein daselbst angegebenes Verfahren gefunden werden können. Zweitens ist es nicht wahr, dass ich das that, was im 3. Abschn. der „St." angegeben ist, dass ich nämlich die vorliegende Gleichung durch die Petzval'sche — fälschlich Spitzer'sche — Transformation auf die Form (5) gebracht habe. Ich brachte vielmehr die Gleichung (2) für den in Rede stehenden Fall, nicht auf eine Gleichung mit linearen Coëfficienten, sondern auf die der hypergeometrischen Differentialgleichung ganz analoge Form:

$$x^2 y'' + [c + (a + b + 1) x] y' + ab . y = 0 \qquad \ldots (48)$$

was, nebenbei bemerkt, früher weder von Spitzer noch von Anderen geschehen, was aber für die Vereinfachung der Rech-

nung von Vortheil ist und alle sonstigen Transformationen unnöthig macht. Drittens ist es nicht wahr, dass ich mich behufs der Integration dieser Gleichung, — wie Spitzer es thun musste*) — des Petzval-Weiler'schen Integrals bediente, sondern ich habe die Integrale direct aus den Euler'schen Grundformeln (und in der Abhandlung (C) wieder auf einem andern Wege) abgeleitet. — Dies zur weitern Charakteristik der Behauptungen Spitzer's.

Ich füge noch bei, dass schon Euler in den „Novi comment. Petrop." T. XVII. (1773) die viel allgemeinere Gleichung:

$$x^2 (a + b x) . z'' + x (c + e x) . z' + (f + g x) . z = 0$$

aus welcher für $a = f = 0$ sich (47) ergibt, (sowie auch Pfaff in den „Disquisit. analyt.") ausführlich erörtert hat. Es ist darum eine sehr „eigenthümliche" Prätension, wenn Spitzer die Gleichung (47) im „Anh." beharrlich seine Gleichung nennt, ohne dass er je auch nur ein einziges Integral derselben berechnet oder selbst nur deren Transformation anders, als durch ein, Herrn Petzval stillschweigend ent — lehntes Verfahren zu Stande gebracht hätte! —

## 11.

Dies vorausgeschickt lasse ich nun die Zusammenstellung der von mir veröffentlichten Lösungen der Gleichung (48) folgen. Der hier zu unterscheidenden Fälle sind es vier; sie beziehen sich blos auf die Elemente $a$ und $b$, weil blos zu unterscheiden ist, ob die reellen Theile von $a$ und $b$ von gleichen oder entgegengesetzten Zeichen sind, und die Grössen $c$ und $x$ keine Vermehrung der Fälle nöthig machen. Da in den „St." speciell für die vorliegende Aufgabe gar keine wie immer gearteten Integrale zu finden sind, so werde ich diejenigen in meinen Abhandlungen (B) und (C) erhaltenen Lösungen anführen, bei welchen unter dem Integralzeichen niemals ein die Betrachtung störender und, wie ich gefunden, durchaus unnöthiger Logarithmus auftritt. Es sei allgemein:

$$c = \lambda_0 + \mu_0 \sqrt{-1} \;,\quad \frac{1}{x} = \lambda + \mu \sqrt{-1} \;,\quad \gamma = \sigma + \tau \sqrt{-1}$$

*) Seine Rechnung folgt ausführlich auf S. 67.

also $$\frac{\gamma}{x} = \lambda\sigma - \mu\tau + (\mu\sigma + \lambda\tau)\sqrt{-1}$$

und man wähle die Zahlen $\sigma$, $\tau$ so, dass:
$\lambda\sigma - \mu\tau$ negativ und $\mu_0\sigma - \lambda_0\tau$ von Null verschieden wird, wozu blos die Kenntniss der Zeichen, — nicht auch der Werthe — von $c$ und $x$ erforderlich ist, und wobei entsprechend für $\sigma$ und $\tau$ eine der Zahlen —1, 0, +1 gesetzt werden kann. In Folge dieser Wahl wird dann der imaginäre Theil von $\frac{c}{\gamma}$ immer von Null verschieden sein.

Meine Lösungen sind die folgenden:

1. Wenn die reellen Theile von $a$ und $b$ positiv sind, so wähle man eine positive ganze Zahl $m$, welche so gross ist, dass der reelle Theil von $\rho$, bestimmt durch die Gleichung:

$$\rho = m - a$$

über + 1 liegt, und berechne damit die Function:

$$f(t) = 1 + m(m-a+b) \cdot \frac{t}{c} + m(m-1) \cdot \frac{(m-a+b)(m-a+b-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{t}{c}\right)^2$$
$$+ \ldots + m(m-1) \ldots 1 \cdot \frac{(m-a+b)(m-a+b-1) \ldots (-a+b+1)}{1 \cdot 2 \ldots m} \left(\frac{t}{c}\right)^m$$

Dann sind:

$$y_1 = x^{-a} \int_0^\infty e^{\frac{\gamma}{x} \cdot u} u^{a-1} (c - \gamma u)^{-b} \, du$$
$$\ldots \text{(X)}$$
$$y_2 = x^{-a-b-\rho} e^{\frac{c}{x}} \int_0^\infty e^{\frac{\gamma}{x} \cdot u} u^{\rho} (c + \gamma u)^{a+b+\rho-1} f\left(\frac{cx}{c+\gamma u}\right) du$$

der Gleichung (48) genügende particuläre Integrale. Diese Integrale sind endliche Grössen, weil der imaginäre Theil von $\frac{c}{\gamma}$ von Null verschieden ist, also $c - \gamma u$ für keinen reellen Werth von $u$ Null werden kann, und weil ferner der reelle Theil von $\frac{\gamma}{x}$ negativ ist, — Alles in Folge der hinsichtlich $\sigma$ und $\tau$ getroffenen Wahl.

In der Abhandlung ($B$) habe ich gelegentlich noch bemerkt, dass in dem speciellen Fall, wenn die reellen Theile von $a$ und $b$ nicht, wie vorhin angenommen, beliebige positive Werthe haben, sondern zwischen 0 und 1 liegen, auch die beiden Integrale:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x^{-a}\int_0^1 e^{\frac{c}{x}} u^{a-1}(1-u)^{-b}\,du \\ y_2 &= x^{-b}\int_0^1 e^{\frac{c}{x}} u^{b-1}(1-u)^{-a}\,du \end{aligned}\right\} \quad \ldots (49)$$

der Gleichung (48) genügen. Hierzu macht Spitzer S. 157 des „Anh." die folgende Bemerkung, die ich der intensivsten Beachtung empfehle: „Winckler schreibt meine (!) Gleichung in der Form (48) auf und gibt, im Falle $a$ und $b$ positive echte Brüche sind, die particulären Integrale (49) an. Diese particulären Integrale ergeben sich unmittelbar aus meinen „Studien". Setzt man nämlich in die obige Gleichung, nach Vorschrift meiner „Studien" $x=\frac{1}{\xi}$, so erhält man

$$\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2}-\xi(a+b-1-c\xi)\frac{dy}{d\xi}+aby=0$$

Setzt man weiter, nach der in meinen „Studien" gegebenen Vorschrift $y=\xi^a.z$, so erhält man die Gleichung

$$\xi\frac{d^2z}{d\xi^2}+(a-b+1-c\xi)\frac{dx}{d\xi}-acz=0 \qquad \ldots (50)$$

deren vollständiges Integral ist:

$$z=C_1\int_0^c e^{u\xi} u^{a-1}(u-c)^{-b}\,du+C_2\,\xi^{b-a}\int_0^c e^{u\xi} u^{b-1}(u-c)^{-a}\,du \ \ldots (51)$$

Es ist somit:

$$y=C_1\,x^{-a}\int_0^c e^{\frac{u}{x}} u^{a-1}(u-c)^{-b}du+C_2\,x^{-b}\int_0^c e^{\frac{u}{x}} u^{b-1}(u-c)^{-a}du \ldots (52)$$

Will man die Winckler'schen Formeln haben, so setze man $u=cw$. Winckler, der, wie ich soeben zeigte, wiederholt

meine Arbeiten — um abermals einen milden Ausdruck zu gebrauchen — ausgenützt hat, erwähnt hiebei nie meinen Namen. Ich muss gestehen, dass ich eine solche Handlungsweise nicht recht verstehe. Was will denn Winckler mit entwendeten (!) particulären Integralen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung anfangen? . . . Dass ich gegenüber einer solchen Handlungsweise nicht länger schweigen wollte, versteht sich wohl von selbst. Ich richtete am 9. December 1875 an das Präsidium der k. Akademie folgendes Schreiben." (Ist dem Leser bekannt.)

Um den Geist wahrhaftig zu erkennen, der in diesen Zeilen spukt, muss man sich daran erinnern, dass in den „St." weder die Formeln (49), resp. (52), noch irgend ein anderes, wie immer beschaffenes Integral der Gleichung (48) vorkommt und dass ich ebensowenig als ein Anderer den „St." etwas „entwenden" konnte, was darin nicht steht und was Spitzer erst hintennach im Jahre 1878 auch berechnet hat, nachdem ich es im Jahre 1875 veröffentlicht hatte.

Ferner habe ich, wie ebenfalls schon bemerkt wurde, die Integrale (49) mittelst der Euler'schen Grundformeln unmittelbar aus der Gleichung (48), ohne diese, wie oben Spitzer nach Petzval, transformiren zu müssen, berechnet, was auch heute noch Jeder thun darf, ohne ein Privilegium zu verletzen, welches Spitzer auf die Gleichung (48) weder besitzt, noch auf Grund des absoluten Mangels jeder eigenen Leistung jemals besitzen wird.

Was nun aber die oben von Spitzer post festum ausgeführte Berechnung betrifft, die derselbe als ihm „geistig eigen" in Anspruch nimmt, so beruht sie, wie schon nach dem Vorhergehenden zu erwarten, ihrem ganzen Inhalte nach auf zwei Plagiaten. Das erste besteht in der Transformation der Gleichung (50) mittelst der beiden Substitutionen $x=\frac{1}{\xi}$, $y=\xi^k.z$, welche Spitzer, wie oben nachgewiesen, Hrn. Petzval abgelauscht hat, die auch schon von Hrn. Weiler auf die Gleichung:

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}+(bx+c)x^2\frac{dy}{dx}+(f.x^2+gx+h)y=0$$

von der (48) ein specieller Fall (für $g=h=0$) ist, in der mehrerwähnten Abhandlung (Crelle 51, S. 126) angewendet worden ist, und welche Spitzer, hiedurch unbeirrt, oben zweimal als „nach seinen Vorschriften" erfolgend zu bezeichnen sich herausgenommen hat.

Das zweite Plagiat besteht darin, dass die Integration der Gleichung (50), welche Spitzer oben ausführt, einfach im Hinschreiben eines speciellen Falles des Petzval-Weiler'schen Integrals besteht — was Spitzer, abermals „ehrlich citirend", wohlweislich verschweigt, was ich aber nun darlegen werde.

Setzt man nämlich in der Gleichung (5), jener (50) entsprechend:

$$a_1=-c, \qquad b_1=a-b+1, \quad a_0=0, \qquad b_0=-ac$$

so ergibt sich aus (9), (10) und (13)

$$\alpha=c \quad , \quad \beta=0$$
$$A=-b+1 \quad , \quad B=a \quad , \quad A_1=1-a \quad , \quad B_1=b$$

daher aus dem Petzval-Weiler'schen Integral (15):

$$y=C_1\int_0^c e^{u\xi}(u-c)^{-b}u^{a-1}du+C_2\,\xi^{b-a}\int_0^c e^{u\xi}(u-c)^{-a}u^{b-1}du$$

also genau das Resultat (51) der „Anhanges."

Möge nun der Leser die folgenden Thatsachen zusammenhalten:

Erstens: In den „St." kommen die Integrale (49), resp. (52) der Gleichung (48) nicht vor.

Zweitens: Im Jahre 1875 habe ich dieselben unmittelbar aus den Euler'schen Grundformeln abgeleitet und mit genauer Angabe dieser Quelle zuerst veröffentlicht.

Drittens: Drei Jahre nach dieser Veröffentlichung hat Spitzer jene Integrale auf „seine" Weise, d. h. nach Anwendung der Transformation von Petzval aus dem Petzval-Weiler'schen Integral exemplariter, ohne jede eigene Zuthat, auch berechnet und dann ohne jede Erwähnung dieser Quellen im Jahre 1878 veröffentlicht.

Diesen Thatsachen zum Trotz erhebt Spitzer den Anspruch, ich hätte schon im Jahre 1875 die zuerst von mir aufgestellten Formeln (49), selbst ohne dass ich wissen konnte, ob

Spitzer sie durch Substitution nach den Integralen von Petzval und Weiler je wirklich ausgerechnet oder je auch nur gesehen hat, mit seinem Namen belegen, also sogar für seine künftigen Plagiate Reclame machen sollen, und, weil dies nicht geschehen ist — und nicht geschehen konnte — hätte ich ihm meine Formeln „entwendet", mich dadurch eines „Plagiats" und einer „Handlungsweise" schuldig gemacht, die ihn veranlasste, „nicht länger zu schweigen", sondern das bekannte Schreiben in die Zeitung zu bringen!

Durch das im Citat enthaltene Geständniss hat Spitzer den gänzlichen Mangel jeder Berechtigung, jedes scheinbaren Grundes, womit sein verleumderisches, alle Schranken niederrennendes Verfahren motivirt oder irgendwie gerechtfertigt werden könnte, vollständig blosgelegt. Waren die früheren Anmassungen des Spitzer'schen Pamphlets anwidernd, so erregen die in jener Expectoration enthaltenen Fanfannoraden einen Widerwillen, dem ich aus Achtung vor dem Leser keinen Ausdruck geben kann.

Ich komme nun zu dem zweiten Fall der Gleichung (48):

2. Wenn die reellen Theile von $a$ und $b$ negativ sind. Man wähle eine positive ganze Zahl $n$, welche so gross ist, dass der reelle Theil einer Grösse $\rho$, bestimmt durch die Gleichung

$$\rho = n + b - 1$$

über $+1$ liegt, oder im Allgemeinen wenigstens positiv ist und setze

$$f(t) = 1 - n(n-a+b)\frac{t}{c} + n(n-1)\frac{(n-a+b)(n-a+b-1)}{1\,.\,2}\cdot\left(\frac{t}{c}\right)^2 + \dots$$
$$+ (-1)^n . n(n-1)..1 . \frac{(n-a+b)(n-a+b-1)\dots(-a+b+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}\left(\frac{t}{c}\right)^n$$

dann genügen der Gleichung (48) die Integrale:

$$y_1 = x^{-a} e^{\frac{c}{x}} \int_0^\infty e^{\frac{\gamma}{x}u} u^{-b} (c+\gamma u)^{a-1} du \quad \dots (XI)$$

$$y_2 = x^{-b-n} \int_0^\infty e^{\frac{\gamma}{x}u} u^{\rho} (c-\gamma u)^{-a-b+\rho+1} f\left(\frac{cx}{c-\gamma u}\right) du$$

wobei $\gamma$ und $c$ die angegebene Bedeutung haben.

3. Wenn der reelle Theil von $a$ positiv, jener von $b$ aber negativ ist, so genügen:

$$y_1 = x^{-a} \int_0^1 e^{\frac{c}{x} u} u^{a-1} (1-u)^{-b} du$$

$$y_2 = x^{-a} \int_0^\infty e^{\frac{\gamma}{x} u} u^{a-1} (c-\gamma u)^{-b} du$$

der Gleichung (48). Wie in meiner Abhandlung ($C$) gezeigt, kann, wenn man statt blos $+\infty$ auch $-\infty$ als Grenze zulassen will, gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x^{-a} e^{\frac{c}{x}} \int_0^{\pm\infty} e^{+\frac{c}{x} u} u^{-b} (1+u)^{a-1} du \\ y_2 &= x^{-x} \int_0^{\pm\infty} e^{+\frac{c}{x} u} u^{a-1} (1-u)^{-b} du \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(XII)}$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der reelle Theil von $\frac{c}{x}$ negativ oder positiv ist.

4. Wenn der reelle Theil von $a$ negativ, jener von $b$ positiv ist, so ist selbstverständlich ebenso:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x^{-b} e^{\frac{c}{x}} \int_0^{\pm\infty} e^{+\frac{c}{x} u} u^{-a} (1+u)^{b-1} du \\ y_2 &= x^{-b} \int_0^{\pm\infty} e^{+\frac{c}{x} u} u^{b-1} (1-u)^{-a} du \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(XIII)}$$

Keines dieser Integrale kommt in den „St." vor und keines kann aus den „daselbst gegebenen Vorschriften" abgeleitet werden.

12.

Hiemit habe ich alle von dem verleumderischen Schreiben Spitzer's und dem „Anh." berührten Puncte meiner Abhandlungen ($A$) und ($B$) bis in die kleinsten Details erörtert. Ich

habe dies in geordneter Weise gethan, und um den, wie ich befürchte, wenig verbreiteten „Anh." als bekannt nicht voraussetzen zu müssen, beinahe den ganzen Inhalt desselben in Citaten, freilich nicht in der Ordnung Spitzer's, sondern jedesmal an der betreffenden Stelle vorgeführt, weil jene „Ordnung" ein Chaos ist, dazu bestimmt, dem Leser jede Uebersicht und damit jedes Urtheil unmöglich zu machen und zugleich Alles, was Spitzer nicht passt, bequem verschweigen zu können. Spitzer sucht Druckfehler in meinen Arbeiten und argumentirt damit, ohne sie als solche zu bezeichnen, er schreibt alle von Petzval, Weiler und Anderen herrührenden Transformationen sich selbst zu, nennt ohne Unterlass das Petzval-Weiler'sche Integral — das Alpha und Omega der „St." — sein Integral, sein „geistiges Eigenthum", sucht plausibel zu machen, „seine" Formeln seien viel besser als die meinigen, — was mir, nebenbei bemerkt, höchst gleichgiltig ist und gar nicht zur Sache gehört, aber zugleich für das Gegentheil dessen spricht, was Spitzer zu beweisen hätte; er berechnet einige Beispiele, um den Leser von der Beweisfrage abzulenken, bedient sich fast auf jeder Seite einer Anzahl schimpflicher Ausdrücke (s. oben Art. 2), — die ich ihm zu ferneren Eroberungen „geistigen Eigenthums" hiermit ungebraucht zurückstelle, — und liefert nur den einen Beweis vollständig, dass er seine Verdächtigungen nicht beweisen und sich selbst nicht rechtfertigen kann.

Damit indessen der Leser von Allem Kenntniss habe, was auch nur den Anschein hat, als wolle Spitzer den ihm obliegenden Beweis wenigstens versuchen, möge auch die einzige hierher etwa zu rechnende Stelle des „Anh." wörtlich folgen. Sie lautet:

„Auf gleiche Weise", — dies bezieht sich wieder darauf, dass „blos" die Grenzen nicht stimmen wollen, die meinigen reell, die Spitzer'schen imaginär sind, — „lassen sich fast alle (!) von Winckler aufgestellten Integrale aus den von mir (immer wieder!) gegebenen ableiten. Die von Winckler mit so viel Unverstand eingeführten imaginären Zahlen verschwinden durch Einführung einer neuen Variable ganz aus den Ausdrücken unter dem Integralzeichen, und stellen sich blos in

den unendlichen Grenzen wieder ein (wieder nur blos in den Grenzen!). Nun weiss man ja, dass der Gleichung

$$(u-\alpha)^A(u-\beta)^B e^{u(m+x)}=0 \quad \text{. . . (53)}$$

welche zur Bestimmung der Grenzen dient (S. 5 der „St."), genügt wird durch $u(m+x)=-\infty$, also wenn $m+x$ positiv ist, durch $u=-\infty$, wenn $m+x$ negativ ist, durch $u=+\infty$. (Und wenn $m+x$ complex ist?)

Man kann auch, wie Petzval zeigte, die Integrationsgrenzen $\pm\infty(\lambda\pm\mu\sqrt{-1})$ setzen, nur wären dann die Zeichen so zu wählen, dass der reelle Theil der imaginären Grenzen im ersten Falle negativ, im zweiten positiv ausfällt."

In diesem Sumpf theils verlegenen, theils sinnverwirrten Geredes verliert sich der erste und letzte Anlauf zu der „eingehenden" Beweisführung. Spitzer möchte offenbar gern auch meine Lösungen „finden", ohne meinen Weg zu befolgen, vermag dies aber nicht und unterlässt es daher klüglich, anzugeben, wie denn eigentlich „die Zeichen zu wählen — wären". Er scheint einzusehen, dass ihm dazu Einiges fehlt, ja vielleicht, dass zu meinen Resultaten eben nur der von mir eingeschlagene Weg führen könne. Indessen liegt in jenem Gerede implicite das Geständniss, dass es sich da um Etwas handelt, was in den „St." nicht steht; denn wäre dies darin schon enthalten, so brauchte Spitzer nicht erst darüber zu deliberiren, wie und was etwa zu machen „wäre", um zu meinen Lösungen zu kommen. Selbstverständlich lege ich jetzt, nachdem der Standpunct Spitzer's bereits klargestellt ist, auf jenes Geständniss durchaus keinen Werth.

Was nun weiterhin die angeführte Auslassung des „Anh." betrifft, so hat Spitzer, um deren Unzulänglichkeit nicht noch handgreiflicher zu machen, diesmal ganz davon geschwiegen, dass die Grenzen $u_0$, $u_1$ nicht nur der Bedingung (53) genügen, sondern auch so beschaffen sein müssen, dass das Integral

$$\int_{u_0}^{u_1} e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}du \quad \text{. . . (54)}$$

einen endlichen Werth erhält, oder „einen Sinn hat", wie Spitzer früher, wo er kritisch thun wollte, sich ausgedrückt hat. Dieses Verschweigen war sehr nöthig, damit der Leser nicht gewahr werde, dass ausser der oberflächlich berührten

Zeichenfrage noch etwas anderes sehr Wichtiges erforderlich wäre, wovon in den „St." wieder nichts steht, nämlich zu verhindern, dass in (54) die Function unter dem Zeichen zwischen den Grenzen durch unendlich gehe. Darum ging Spitzer auch über diesen Anstand, welcher auf dem von mir befolgten Wege vollständig beseitigt ist, mit vorsichtigem Schweigen hinweg!

In gleicher Weise ist Spitzer in erwähnter Auslassung, wie im ganzen „Anh.", jeder in die Einzelnheiten gehenden Vergleichung meiner Resultate mit den „seinigen", sowie jedem Nachweis des Vorkommens der ersteren in den „St." — wodurch allein Spitzer sich hätte rechtfertigen können — auf das Behutsamste aus dem Weg gegangen und einfach Alles schuldig geblieben.

Worin nun ferner der „Unverstand" liege, mit welchem ich die imaginären Zahlen (resp. die Zahlen $\sigma$ und $\tau$) eingeführt haben soll, zeigt Spitzer, der immer nur behauptet und niemals beweist, ebensowenig, als er seinen Lesern auch nur die Bedeutung jener Zahlen, welche doch in meinen Abhandlungen deutlich genug erklärt ist, mit einem Worte auseinander zu setzen für nöthig hält. Er denkt sich wohl, seine Leser verlangen so etwas nicht, diese glauben daran und machten sich ja auch nichts daraus, als Spitzer den früher geschilderten Missbrauch mit imaginären Substitutionen bei bestimmten Integralen getrieben hat; ausserdem aber durften sie keine Kenntniss von etwas erlangen, wovon in den „St." nichts zu finden ist.

Damit nun aber meine Leser in die Lage gesetzt werden, über das, was Spitzer Unverstand nennt, selbst zu urtheilen, will ich den Zweck der Einführung des Imaginären und damit die Art, auf welche ich zu den früher angegebenen Lösungen gelangt bin, in Kürze auseinandersetzen. Sie beruht darauf, dass, damit das Integral:

$$R.\int_{u_1}^{u_0} e^{\gamma x^n . u} . u^{\alpha-1}(c-u)^{\beta-1} du$$

worin $R$ eine gewisse Function von $x$ ist, den oben in drei Fällen durch Transformation aus (1) abgeleiteten Differentialgleichungen Genüge leiste, für die beiden unbekannten Constanten $\gamma$ und $c$ nur eine einzige Gleichung

$$\gamma c = \varkappa$$

besteht, in der $\varkappa$ eine gegebene Grösse ist, und dass man von diesem Umstand den hier sehr wichtigen Gebrauch machen kann und muss, zu bewirken, dass sich stets zwei reelle Grenzen $u_0$ und $u_1$ der reell bleibenden Variabeln $u$ angeben lassen, zwischen welchen genommen das Integral einen endlichen Werth erhält und zugleich der betreffenden Differentialgleichung genügt.

Dies geschieht offenbar dann, wenn man $\gamma$ und $c$ jener Gleichung entsprechend so bestimmt, dass der reelle Theil von $\gamma x^n$ negativ und, falls $\beta$ negativ ist, zugleich auch der imaginäre Theil von $c$ von Null verschieden wird. Es reicht also immer hin, wenn blos einer der Exponenten von $u$ und $c-u$ oder der reelle Theil eines derselben positiv ist, um die Grenzen $u_0=0$, $u_1=\infty$ setzen zu können. Diese einzige Bedingung wird aber von selbst, wenigstens durch eine der beiden Auflösungen, welche aus den Euler'schen Grundgleichungen sich ergeben, erfüllt.

Auch bei der, meiner Abhandl. ($C$) zu Grunde liegenden Form des Ausdrucks unter dem Integralzeichen, welche allgemeiner als die Euler'sche ist und, wie ich glaube, an deren Stelle treten muss, habe ich von der vorstehenden Bemerkung Gebrauch gemacht.

Nach der üblichen geometrischen Darstellung complexer Zahlen lässt sich die erwähnte Bemerkung so ausdrücken, dass durch die Auflösung der Gleichung $\gamma c=\varkappa$ mittelst complexer Werthe der Werth $u=c$, wofür die Potenz $(c-u)^{\beta-1}$ unendlich würde, aus der Axe der reellen Zahlen in die Zahlenebene verschoben wird, so dass $u$ nicht $=c$ werden kann, wenn es nur die reellen Werthe von 0 bis $\infty$ durchläuft. Da diese einfache Bemerkung bei der vorliegenden Aufgabe früher nicht gemacht oder angewendet wurde, so konnte man nur in den wenigsten Fällen Werthe für die Grenzen $u_0$, $u_1$ finden, zwischen welchen die Integrale endliche Grössen darstellen, man konnte daher nicht in allen Fällen weder die Differentialgleichungen (1) und (2) noch die Riccati'sche durch Quadraturen vollständig integriren und war genöthigt zu den im Eingang erwähnten Formen oder zu der, jeder Discussion sich entziehenden Formel

$$y_2 = y_1 \int \frac{Pdx}{y_1{}^2}$$

worin $P$ eine gegebene Function von $x$, und $y_1$ ein im Allgemeinen in geschlossener Form nicht findbares bestimmtes Integral ist, seine Zuflucht zu nehmen. Von dieser, die Grundlage meiner Abhandlungen bildenden Betrachtung findet sich in den „St." und nun auch im „Anh." Spitzer's keine Spur.

Ueberblickt man das Ganze, so ergibt sich, dass Spitzer weder an Methoden noch an Formeln, noch durch irgend einen selbstständigen Gedanken für die Integration der in Rede stehenden Differentialgleichungen durch reine Quadraturen auch nur das Allergeringste geleistet, sondern ohne jede Scheu vor Eingriffen in fremdes geistiges Eigenthum, die von Anderen, namentlich Petzval und Weiler gefundenen Integrale reproducirt und dann als seine Erfindung ausgegeben hat, dass daher die „St." für die vorliegende Frage, wie für noch viele andere, ohne jeden selbstständigen Werth, eine zugleich form- und principlose Compilation sind; welcher nun Spitzer durch seine im „Anh." erhobenen bodenlosen Ansprüche auf jene ihm fremden Leistungen erst recht und weit mehr als man früher annehmen mochte, ihren wahren Charakter aufgeprägt hat.

Damit nicht genug, hat derselbe durch die Verdächtigung, der Inhalt meiner Abhandlungen sei ein Abdruck seiner „St.", zugleich den Versuch gemacht, sich die Resultate meiner Arbeiten ebenso zuzueignen, wie er jene der Bemühungen Anderer in sein „geistiges Eigenthum" umgewandelt hat.

Ich aber verwahre mich gegen solche Zugriffe, weise die schmählichen Ausfälle Spitzer's zurück und werde seine Angriffe im Einzelnen wie im Ganzen so lange als elende und gehässige Verleumdungen zu erklären fortfahren, als derselbe nicht alle in meinen Abhandlungen ($A$) und ($B$) mit römischen Ziffern bezeichneten, resp. die in vorliegender Schrift unter (I.) bis (XIII.) angeführten Integrale der Gleichungen (1) und (2) als in den „St." enthalten und als sein wahres geistiges Eigenthum nachgewiesen hat.

---

## II. Zwölf falsche Sätze des Prof. S. Spitzer.

13.

Wenn das Benehmen Spitzer's mir noch irgend eine Rücksicht auf ihn übrig liesse, wenn derselbe ursprünglich seine Denunciationen durch Beweisgründe zu stützen wenigstens versucht und im „Anh." nicht statt jeder Rechtfertigung, statt jeder Spur eines Beweises, mit Beschimpfungen, und um seine alten Plagiate zu retten, nicht mit Ausflüchten und Entstellungen, sodann auf meine Aufforderung Beweise zu liefern, nicht hinterher („Anh." S. 160) mit der frivolen Erklärung, „er hatte weder Lust noch Zeit mich zu widerlegen" geantwortet hätte, so würde ich die vorliegende, mit Spitzer schärfer in's Gericht gehende Charakteristik vielleicht ganz unterlassen, jedenfalls aber auf das bisher Angeführte beschränkt haben. Nach allem Vorangegangenen können jedoch Rücksichten, die sonst Jedem, der bei der Wahrheit bleibt, den Anstand wahrt und Andere unbehelligt lässt, gerne gewährt werden, Spitzer gegenüber nicht mehr bestehen.

Desshalb folgt hier noch ein zweites Capitel, aus welchem nun jeder Sachverständige auch erfahren wird, von welcher Qualität das echte geistige Eigenthum Spitzer's ist. Dieses Capitel handelt ebenfalls vom 3. Abschn. der „St." und betrifft die Gleichung (2) für den Fall, in welchem diese der hypergeometrischen Reihe angehört. Dasselbe ist zum grössten Theil schon in meiner frühern Schrift erschienen, aber im „Anh." von Spitzer nicht widerlegt, nicht mit einer Silbe berührt, sondern elendiglich todtgeschwiegen, ja selbst nicht einmal in Bezug auf mögliche Druckfehler durchforscht worden — obgleich die Zurückweisung meiner „Angriffe" in der „Abfertigung" verheissen ist. Spitzer hält da nichts mehr „vollständig aufrecht", zeiht mich nicht der Unwahrheit, „der einzigen Waffe, die ich

meisterhaft zu führen wisse", und wirft mir nicht mehr Mangel an der „ausreichenden Fassungsgabe" vor, — was Alles mich sehr betrübt. Vielleicht holt er jetzt, nach dem Erscheinen dieser vermehrten Auflage, das Versäumte nach, und wenn auch dann nicht? — nun da hoffe ich auf eine baldige dritte, abermals vermehrte Auflage!

Doch zur Sache.

Bekanntlich hat Jacobi schon frühe die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe in der zweckmässigen Form einfacher bestimmter Integrale (reiner Quadraturen) integrirt. (Siehe dessen „Mathemat. Werke." II. B., S. 97.) Aber Spitzer sagt hierüber im Vorwort zu den „St.": „Ich muss noch erwähnen Pfaff, Abel, Kummer, Jacobi, . . . sie Alle haben sich mit solchen Gleichungen beschäftigt und manches Beachtenswerthe (!) geliefert, aber eine in gehöriger Vollständigkeit durchgeführte Analysis obiger Differentialgleichung fehlte bisher dennoch. Ich habe es unternommen, eine solche zu liefern. . . ." Möge nun der geehrte Leser diese „Analysis" Spitzer's, namentlich in Hinsicht der Integration durch Quadraturen, und insoweit sie wirklich Neues bietet, bei Licht betrachten. Es bestehen die triftigsten Gründe, dass sie neu und in vollem Gegensatz zu allem Vorangehenden auch ganz und gar Spitzer's „geistiges Eigenthum" ist; denn nicht nur, dass sich ihre Resultate in keiner andern Schrift auffinden lassen, sind sie unverkennbar Spitzer so durchaus geistig eigenthümlich, dass sicherlich kein Mathematiker auf sie verfallen oder gar so grossmüthig gewesen wäre, sie der öffentlichen Bewunderung preiszugeben.

Nun zuerst eine kleine Vorbereitung.

Statt wie Gauss, Jacobi u. s. w. die in Rede stehende Differentialgleichung in der Form

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{dy}{dx}-ab\,.\,y=0 \quad . \; . \; . \; (55)$$

zu schreiben, stellt Spitzer dieselbe der grössern Weitläufigkeit wegen und weil doch schon das Weitläufigere manchmal auch das Allgemeinere gewesen, in folgender Art dar:

$$(x-\alpha)(x-\beta)y''-[(B+\mu-1)(x-\alpha)+(A+\mu-1)(x-\beta)]y'$$

[19] . . . $$+\mu(A+B+\mu-1)y=9 \quad . \; . \; . \; (56)$$

Da aber jene Mathematiker, die, wie Spitzer zugibt, „manches Beachtenswerthe" bezüglich der Gleichung (55) geliefert, doch nicht gar so ungeschickt daran gethan haben, die fünf Constanten $\alpha$, $\beta$, $A$, $B$, $\mu$ auf deren blos drei $a$, $b$, $c$ ohne die geringste Einbusse an Allgemeinheit zu reduciren, so soll auch hier jedes Resultat Spitzer's in die übliche Form zurückübersetzt werden, wozu offenbar die Relationen:

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 1$$
$$1 - A - \mu = c$$
$$2 - 2\mu - (A + B) = a + b + 1$$
$$\mu(A + B + \mu - 1) = ab$$

dienen. Da hieraus $\mu^2 + (a + b)\mu + ab = 0$ folgt, so ergeben sich die beiden Auflösungen:

$$\begin{aligned} &\mu_1 = -a, \quad A_1 = a - c + 1, \quad B_1 = c - b, \quad A_1 + B_1 + \mu_1 - 1 = -b \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots (57) \\ &\mu_2 = -b, \quad A_2 = b - c + 1, \quad B_1 = c - a, \quad A_2 + B_2 + \mu_2 - 1 = -a \end{aligned}$$

die übrigens durch blosse Vertauschung von $a$ und $b$ auseinander erhalten werden.

## 14.

Der Beweis, dass die folgenden zwölf Sätze Spitzer's falsch sind, ist, obgleich kein Mathematiker über den Werth der „St." mehr im Unklaren sein kann, doch insoferne von allgemeinerem Interesse, als er minder Erfahrene, welche die mit grosser Sicherheit vorgetragenen Lehren gläubig hinnehmen, zur Vorsicht mahnt. Möge daher der Leser die nachstehenden, etwas umständlichen Ausführungen mir zu Gute rechnen; sie werden sich streng an die Sache halten.

I. Auf Seite 38 der „St." im 3. Abschnitt („Erste Fortsetzung". Wien 1861) steht Folgendes geschrieben:

„Das vollständige Integral der Gleichung [19]*) ist für den Fall

$$A > 0, \; B > 0, \text{ ferner } A + B + \mu > 0 > \mu,$$

---

*) Die hier und weiter unten in eckige Klammern eingeschlossenen Zahlen bezeichnen die Nummern der betreffenden Formeln in den „Studien"; sie sind, um das Nachschlagen zu erleichtern, hier beigefügt.

$$[76]\ldots\quad \begin{aligned} y &= C_2 \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(x-u)^{\mu}\,du \\ &+ C_2 (x-\alpha)^{A+\mu} \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{-\mu-1}(u-\beta)^{A+B+\mu-1}(x-u)^{-A}\,du \end{aligned}$$

In der üblichen Weise geschrieben besagt dies mit Rücksicht auf (57) was folgt:

Wenn $a-c+1>0,\ c-b>0,\ 1-b>0>-a$ ist, so sind:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \int_0^1 u^{a-c}(1-u)^{c-b-1}(x-u)^{-a}\,du, \\ y_2 &= x^{1-c}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{-b}(x-u)^{c-a-1}\,du \end{aligned}\right\}\ \ldots (58)$$

zwei verschiedene particuläre Integrale der Gleichung (55), nämlich zwei nicht blos um constante Factoren von einander verschiedene Functionen von $x$.

Obiger Satz ist falsch. Zuerst sei bemerkt, dass die von Spitzer angegebenen Bedingungen nur dann genügen, wenn $x$ nicht zwischen 0 und 1 liegt, worauf jedoch „die in gehöriger Vollständigkeit durchgeführte Analysis" Spitzer's keine Rücksicht nimmt, die überhaupt von einer durch die Natur der Sache bedingten Unterscheidung einzelner Intervalle der Veränderlichen $x$ nichts wissen will.

Wird jetzt, wie nothwendig, $x>1$ vorausgesetzt und gibt man den beiden Integralen (58) die Form

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= x^{-a}\int_0^1 u^{a-c}(1-u)^{c-b-1}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{-a} du, \\ y_2 &= x^{-a}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{-b}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{c-a-1} du \end{aligned}\right\}\ \ldots (59)$$

entwickelt sodann jedes in eine nach Potenzen von $x$ absteigende Reihe und berücksichtigt die bekannten Formeln:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du,$$

$$\Gamma(n+\alpha)=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha),$$

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

welche für $\alpha>0$, $\beta>0$, $n$ eine positive ganze Zahl gelten, so ergeben sich für den Coëfficienten von $x^{-(n+a)}$ die folgenden Ausdrücke.

Bei $y_1$ ist derselbe

$$=\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1\;.\;2\;\;.\;\;.\;\;n}\int_0^1 a^{n+a-c}(1-u)^{c-b-1}du$$

$$=\frac{\Gamma(a-c+1)\Gamma(c-b)}{\Gamma(a-b+1)}\cdot\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1\,.\,2\;\;.\;\;.\;\;n}\cdot\frac{(a-c+1)(a-c+2)\ldots(a-c+n)}{(a-b+1)(a-b+2)\ldots(a-b+n)}$$

Bei $y_2$ dagegen

$$=\frac{(a-c+1)(a-c+2)\ldots(a-c+n)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;n}\int_0^1 u^{n+a-1}(1-u)^{-b}du$$

$$=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)}\cdot\frac{(a-c+1)(a-c+2)\ldots(a-c+n)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;n}\cdot\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{(a-b+1)(a-b+2)\ldots(a-b+n)}$$

Da sich diese beiden Entwicklungs-Coëfficienten nur um die voranstehenden, von $n$ unabhängigen Factoren unterscheiden, die beiden Reihen also, abgesehen von diesen Factoren, vollkommen mit einander übereinstimmen, so folgt:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)}\cdot y_1=\frac{\Gamma(a-c+1)\Gamma(c-b)}{\Gamma(a-b+1)}\cdot y_2$$

oder also

$$y_2=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(c-b)}\cdot y_1 \qquad \ldots (60)$$

wie ich behauptet habe; denn es unterscheidet sich das eine particuläre Integral von dem andern blos durch einen constanten Factor.

Der Satz Spitzer's, dass die Gleichung [76] der „St." das vollständige Integral der Differentialgleichung [19] sei,

zerfällt daher in sein leeres Nichts; die Gleichung [76] hat die Gestalt

$$y = C_1 y_1 + \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(c-b)} C_2 \cdot y_1$$

deren blosser Anblick jede Kritik unnöthig macht.

II. Auf Seite 39 der „St." (3. Abschn.) behauptet Spitzer weiter, „es sei in dem Falle, wo

$$A > 0 \ , \ B > 0 \ , \ A + \mu = 0,$$

[78] . . .

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (x-u)^\mu du$$

$$+ C_2 \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (x-u)^\mu \log \frac{(x-\alpha)\,(u-\beta)}{(x-u)\,(u-\alpha)} du$$

das vollständige Integral der Gleichung [19]."

In der gebräuchlichen Schreibweise würde dies heissen: Wenn

$$a-c+1 > 0, \ c-b > 0, \ c = 1$$

ist, so sind

$$\int_0^1 u^{a-c} (1-u)^{c-b-1} (x-u)^{-a} du,$$

$$\int_0^1 u^{a-c} (1-u)^{c-b-1} (x-u)^{-a} \log \frac{x(u-1)}{u(x-u)} du$$

zwei verschiedene particuläre Integrale der Gleichung (55), nämlich zwei nicht blos um einen constanten Factor von einander verschiedene Functionen von $x$.

Zunächst sei nun bemerkt, dass die Gleichung [78] sowie auch mehrere später folgende Gleichungen Spitzer's in der Weise geschrieben sind, dass das zweite particuläre Integral das erste als Posten, versehen mit dem Factor $\log(-1)$ in sich enthält, nämlich durch

$$\log(-1) . \int_0^1 a^{a-c} (1-u)^{c-b-1} (x-u)^{-a} du$$

$$+ \int_0^1 u^{a-c} (1-u)^{c-b-1} (x-u)^{-a} \log \frac{x\,(1-u)}{u\,(x-u)} du$$

ausgedrückt werden kann. Da sich nun der erste Theil mit dem ersten particulären Integral vereinigen lässt*), so besagt der Satz Spitzer's, es seien unter den gemachten Voraussetzungen

$$y_1 = \int_0^1 u^{a-c}(1-u)^{c-b-1}(x-u)^{-a}du,$$
$$y_3 = \int_0^1 u^{a-c}(1-u)^{c-b-1}(x-u)^{-a}\log\frac{x(1-u)}{u(x-u)}du \quad \ldots (61)$$

zwei verschiedene Functionen von $x$. Aber dieser Satz ist falsch, weil wieder

$$y_3 = ky_1$$

ist, wenn unter $k$ eine gewisse constante Grösse verstanden wird.

Um dies zu zeigen beachte man zuerst, dass aus [60] die Gleichung:

$$\frac{y_2-y_1}{1-c} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-b)-\Gamma(c-b)\Gamma(a-c+1)}{1-c}\cdot\frac{y_1}{\Gamma(c-b)\Gamma(a-c+1)}$$

folgt, und dass, wenn man hierin $c=1$ werden lässt, die rechte Seite, welche die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, in:

$$\left[\frac{\Gamma'(1-b)}{\Gamma(1-b)} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\right]\cdot y_1$$

übergeht. Da ferner der Bruch linker Hand mit Rücksicht auf (59) auch in der Form

$$\frac{x^{-a}}{1-c}\int_0^1 du\left[u^{a-1}(1-u)^{-b}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{c-a-1} - u^{a-c}(1-u)^{c-b-1}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{-a}\right]$$

geschrieben werden kann, deren Werth sich ergibt, wenn man den Zähler (das Integral) und den Nenner $(1-c)$ nach $c$ differentiirt und dann $c=1$ setzt, so findet offenbar die folgende, so viel mir bekannt, neue Gleichung:

---

*) Diese Umformung werde ich in späteren Fällen als bereits vollzogen ansehen.

$$x^{-a}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{-b}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{-a} log\frac{x(1-u)}{u(x-u)}du=\left[\frac{\Gamma'(1-b)}{\Gamma(1-b)}-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\right]y_1$$

statt, deren linke Seite, weil $c=1$, identisch mit $y_3$ ist. Man hat somit

$$y_3=\left[\frac{\Gamma'(1-b)}{\Gamma(1-b)}-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\right]\cdot y_1 \quad \ldots (62)$$

Die Behauptung Spitzer's, es stelle [78] das vollständige Integral von [19] dar, ist also durchaus falsch; [78] ist nur ein particuläres Integral von der Form $Cy_1$.

Zum Ueberfluss habe ich die Gleichung (62) auch noch durch das Verfahren der Reihenentwicklung verificirt, welches, allerdings weniger einfach als der vorhin eingeschlagene Weg, zu demselben Ergebnisse führt. Uebrigens bemerke ich, dass aus (61) und (62) für $a+b=1$, also $b=1-a$, und wenn

$$0<a<1$$

ist, die Gleichung:

$$\int_0^1 [u(1-u)]^{a-1}(x-a)^{-a} log\frac{x(1-u)}{u(x-u)}du=0 \quad \ldots (63)$$

sich ergibt, die auch durch Reihenentwicklung leicht verificirt werden kann.

15.

III. Auf Seite 39 der „St." steht der weitere Satz: „Wenn

$$1-A>0,\ 1-B>0,\ 1+\mu>0>A+B+\mu-1,$$

so ist:

$$[79]\ldots \quad \begin{aligned} y=\;&C_1\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}(x-u)^{A+B+\mu-1}du \\ &+C_2(x-\alpha)^{A+\mu}\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{-A-B-\mu}(u-\beta)^{\mu}(x-u)^{B-1}du \end{aligned}$$

das Integral der Gleichung [19]" — selbstverständlich das vollständige, weil ja zwei willkürliche Constante darin paradiren.

Nach der üblichen Ausdrucksweise heisst dies: Wenn

$$c-a>0,\ 1+b-c>0,\ 1-a>0>-b,$$

so sind:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \int_0^1 u^{b-c}(1-u)^{c-a-1}(x-u)^{-b}du, \\ y_2 &= x^{1-c}\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{-a}(x-u)^{c-b-1}du \end{aligned}\right\} \quad \ldots (64)$$

zwei wesentlich verchiedene Functionen von $x$.

Abgesehen davon, dass die obigen Bedingungen für die Endlichkeit dieser Integrale nur dann genügen, wenn $x$ nicht zwischen 0 und 1 liegt (was Spitzer, der sich einmal auf Unterscheidungen bezüglich der Intervalle von $x$ nicht einlassen will, unbeachtet lässt), ist der obige Satz wieder ganz falsch, da auch hier $y_1$ und $y_2$ in einem constanten Verhältnisse stehen, nämlich

$$y_2 = \frac{\Gamma(b)\Gamma(1-a)}{\Gamma(b-c+1)\Gamma(c-a)} \cdot y_1 \quad \ldots (65)$$

ist, und zwar aus den, Art. 14 unter (I) angeführten Gründen, weil die Integrale (64) aus jenen in (58) durch Vertauschung von $a$ und $b$ hervorgehen.

IV. Auf Seite 39 der „St." wird behauptet, dass, wenn

$$1-A>0\ ,\ 1-B>0\ ,\ 1+\mu>0>A+B+\mu-1$$

und auch

$$A+\mu=0$$

ist, das Integral der Gleichung [19] durch

$$[80] \ldots \quad \begin{aligned} y &= C_1\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}(x-u)^{B-1}du \\ &+ C_2\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}(x-u)^{B-1}\log\frac{(x-\alpha)(u-\beta)}{(x-u)(u-\alpha)}\,.\,du \end{aligned}$$

ausgedrückt sei. Dies heisst in der üblichen Darstellung und wenn man wieder, wie in Art. 14 unter (II) geschah, den imaginären Theil des zweiten Integrals in [80] mit dem ersten Integral vereinigt:

Ist $c-a>0$ , $1+b-c>0$ , $1-a>0>-b$ , $c=1$

so sind:

$$\begin{aligned} y_1 &= \int_0^1 u^{b-c}(1-u)^{c-a-1}(x-u)^{-b}du, \\ y_3 &= \int_0^1 u^{b-c}(1-u)^{c-a-1}(x-u)^{-b}\log\frac{x(1-u)}{u(x-u)}du \end{aligned} \quad \ldots (66)$$

nicht blos um einen constanten Factor unter sich verschiedene Functionen von $x$.

Da diese Ausdrücke aus jenen in (61) durch blosse Vertauschung von $a$ und $b$ erhalten werden, so folgt aus den unter (II) angeführten Gründen für $c=1$ auch hier wieder, dass

$$y_3 = \left[\frac{\Gamma'(1-a)}{\Gamma(1-a)} - \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)}\right] \cdot y_1 \quad \ldots (67)$$

und daher die Behauptung, es sei [80] ein vollständiges Integral, wieder falsch ist.

Auf den genannten „Satz" aber hält Spitzer offenbar sehr grosse Stücke, denn er schreibt (S. 39):

„So hat man z. B. für die Gleichung:

$$x(1-x^2)y'' - (1+x^2)y' + xy = 0$$

(welche Euler betrachtete, 2. Band S. 258 der Salomonschen Uebersetzung der Instit. calc. integr.) wenn man in selbe $x^2 = \xi$ setzt:

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2} - \xi\frac{dy}{d\xi} + \frac{1}{4}y = 0$$

und hier ist

$$\alpha = 1 \ , \ \beta = 0 \ , \ \mu = \frac{1}{2} \ , \ A = -\frac{1}{2} \ , \ B = \frac{1}{2}$$

somit hat man:

$$y = C_1 \int_0^1 \frac{\sqrt{u}\, du}{\sqrt{(1-u)(\xi-u)}} + C_2 \int_0^1 \frac{\sqrt{u}\, du}{\sqrt{(1-u)(\xi-u)}} \log \frac{u(\xi-1)}{(\xi-u)(u-1)} \quad \ldots (68)$$

als Integrale obiger Gleichung. Dieser Ausdruck ist wesentlich einfacher als der von Euler gegebene."

Allerdings hätte Euler niemals gesagt, die Formel (68) stelle ein vollständiges Integral dar.

Scheidet man, um den Widersinn ganz offen zu legen, wie früher, das mit dem Factor $\log(-1)$ versehene erste Integral aus dem zweiten aus und setzt der Kürze wegen:

$$y_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{u}\, du}{\sqrt{(1-u)(\xi-u)}},$$

$$y_3 = \int_0^1 \frac{\sqrt{u}\, du}{\sqrt{(1-u)(\xi-u)}} \log \frac{(\xi-1)u}{(1-u)(\xi-u)}$$

so ergibt sich, wenn man hierin $1-u$ für $u$, zugleich auch $1-\xi = x_1$ setzt und von den sich einstellenden constanten Factoren der Integrale abstrahirt:

$$y_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-u}\, du}{\sqrt{u(x_1-u)}},$$

$$y_3 = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-u}\, du}{\sqrt{u(x_1-u)}} \log \frac{x_1(1-u)}{u(x_1-u)}$$

Diese Integrale aber fallen mit jenen in (66) zusammen, wenn $a = b = \frac{1}{2}, c = 1$ gesetzt wird, wofür aus (67) folgt: $y_3 = 0$, was übrigens sofort aus der im Art. 14 angeführten Gleichung (63) erhalten wird.

Die interessante Spitzer'sche Entdeckung in (68) besteht also in der Gleichung

$$y = C_1 y_1 + C_2 \log(-1) \,.\, y_1$$

deren erheiternden Anblick die Kritik nicht stören soll.

V. Weiter liest man auf Seite 40 der „St." den Satz:

„Wenn $A>0$ , $B>0$ , $A+B+\mu>0>\mu$

so ist das complete Integral der Gleichung [19]:

$$[81] \ldots \quad y = C_1 (x-\beta)^{B+\mu} \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-B+\mu-1} (u-\beta)^{-\mu-1} (x-u)^{-B} du + C_2 (x-\alpha)^{A+\mu} (x-\beta)^{B+\mu} \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{B-1} (u-\beta)^{A-1} (x-u)^{-A-B-\mu} du$$

In üblicher Weise ausgedrückt, besagt dies:

Wenn $a-c+1>0$ , $c-b>0$ , $1-b>0>-a$

so sind, abgesehen von constanten Factoren:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= (1-x)^{c-a-b} \int_0^1 u^{-b} (1-u)^{a-1} (x-u)^{b-c} du, \\ y_2 &= x^{1-c} (1-x)^{c-a-b} \int_0^1 u^{c-b-1} (1-u)^{a-c} (x-u)^{b-1} du \end{aligned}\right\} \quad \ldots (69)$$

von einander verschiedene particuläre Integrale von (55).

Dieser Satz ist wieder so falsch wie alle früheren. Zur Abwechslung will ich dies auf etwas andere Art als in (I) geschah, nämlich mit Benutzung der Gauss'schen (hypergeometrischen) Reihe beweisen. Wird diese Reihe, wie gewöhnlich, durch $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bezeichnet, so ist bekanntlich:

$$\int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-xu)^{-\alpha} du = \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} . F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

Da nun die Gleichungen (69) in der Form:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x^{b-c} (1-x)^{c-a-b} \int_0^1 u^{-b} (1-u)^{a-1} \left(1-\frac{u}{x}\right)^{b-c} du, \\ y_2 &= x^{b-c} (1-x)^{c-a-b} \int_0^1 u^{c-b-1} (1-u)^{a-c} \left(1-\frac{u}{x}\right)^{b-1} du \end{aligned}\right\} \quad \ldots (70)$$

geschrieben werden können, so ist bei $y_1$

$$\beta = 1-b\ ,\ \gamma-\beta = a\ ,\ \alpha = c-b\ ,\ \frac{1}{x}\ \text{für}\ x$$

dann bei $y_2$

$$\beta = c-b\ ,\ \gamma-\beta = a-c+1\ ,\ \alpha = 1-b\ ,\ \frac{1}{x}\ \text{für}\ x$$

zu setzen und erhält man:

$$y_1 = x^{b-c}(1-x)^{c-a-b}\cdot\frac{\Gamma(1-b)\,\Gamma(a)}{\Gamma(a-b+1)}\cdot F(c-b,\ 1-b,\ a-b+1, \frac{1}{x})$$

$$y_2 = x^{b-c}(1-x)^{c-a-b}\cdot\frac{\Gamma(c-b)\,\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(a-b+1)}\cdot F(1-b, c-b, a-b+1, \frac{1}{x})$$

und da $F(\lambda, \mu, \nu, z) = F(\mu, \lambda, \nu, z)$, so folgt

$$y_2 = \frac{\Gamma(c-b)\,\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(1-b)\,\Gamma(a)}\cdot y_1 \qquad \ldots (71)$$

Also stellt [81] nicht das allgemeine, sondern nur ein einziges particuläres Integral dar. W. z. b. w.

VI. Nicht besser verhält es sich mit dem weitern, auf S. 40 der „St." stehenden Satz, der wie folgt lautet:

Wenn $1-A>0$, $1-B>0$, $\mu+1>0>A+B+\mu-1$ und $A+\mu=0$, so ist:

$$[82]\ \ldots\ \begin{aligned} y = {} & C_1\,(x-\beta)^{B+\mu}\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{B-1}(u-\beta)^{-\mu-1}(x-u)^{-B}du \\ & + C_2\,(x-\beta)^{B+\mu}\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{B-1}(u-\beta)^{-\mu-1}(x-u)^{-B}\log\frac{(x-\alpha)(u-\beta)}{(x-u)(u-\alpha)}\cdot du\end{aligned}$$

das complete Integral von [19].

In der einfacheren Schreibweise heisst dies:

Wenn: $1-a>0\ ,\ b>0\ ,\ c=1,$

so sind:

$$\begin{aligned} y_1 &= (1-x)^{1-a-b}\int_0^1 u^{-b}(1-u)^{a-1}(x-u)^{b-1}\,du, \\ y_3 &= (1-x)^{1-a-b}\int_0^1 u^{-b}(1-u)^{a-1}(x-u)^{b-1}\log\frac{x(1-u)}{u(x-u)}\cdot du \end{aligned} \qquad \ldots (72)$$

verschiedene Functionen von $x$, welche der Gleichung (55) für $c=1$ genügen. Das Sinnlose dieses Satzes ergibt sich auf dem schon in (II) befolgten Wege, wenn man in der aus (71) folgenden Gleichung

$$\frac{y_2-y_1}{1-c}=\frac{\Gamma(c-b)\,\Gamma(a-c+1)-\Gamma(1-b)\,\Gamma(a)}{1-c}\cdot\frac{y_1}{\Gamma(1-b)\,\Gamma(a)}$$

die Grösse $c$ in 1 übergehen lässt und den Grenzwerth der in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinenden linken und rechten Seite ermittelt, dabei unter $y_1$ und $y_2$ die Integrale (70) verstanden. Man erhält:

$$y_3=\left[\frac{\Gamma'(1-b)}{\Gamma(1-b)}-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\right]\cdot y_1 \qquad \ldots (73)$$

und sieht hieraus, dass die Integrale (72) keine verschiedenen Functionen von $x$ sind, sondern in einem constanten Verhältnisse stehen, was zu zeigen war.

16.

VII. Auf Seite 40 der „St." ist ferner zu lesen:

„Wenn $1-A>0,1-B>0,\mu+1>0>A+B+\mu-1$ ist, so hat man:

$$\begin{aligned} y= {} & C_1(x-\beta)^{B+\mu}\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^\mu(u-\beta)^{-A-B-\mu}(x-u)^{A-1}du \\ 83]\ \ldots \quad & + C_2(x-\alpha)^{A+\mu}(x-\beta)^{B+\mu}\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{-A}(u-\beta)^{-B}(x-u)^{-1-\mu}\,du \end{aligned}$$

In der gebräuchlichen Art ausgedrückt, besagt dies:
Wenn $\quad c-a>0, b-c+1>0, 1-a>0>-b$
ist, so sind

$$\begin{aligned} y_1 &= (1-x)^{c-a-b}\int_0^1 u^{-a}(1-u)^{b-1}(x-u)^{a-c}\,du, \\ y_2 &= x^{1-c}(1-x)^{c-a-b}\int_0^1 u^{c-a+1}(1-u)^{b-c}(x-u)^{a-1}\,du \end{aligned} \qquad \ldots (74)$$

verschiedene particuläre Integrale von (55). Abermals ein Specimen der „in gehöriger Vollständigkeit durchgeführten Analysis" Spitzer's. Um es zu würdigen, sei bemerkt, dass man

$$y_1 = x^{a-c}(1-x)^{c-a-b}\int_0^1 u^{-a}(1-u)^{b-1}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{a-c} du,$$

$$y_2 = x^{a-c}(1-x)^{c-a-b}\int_0^1 u^{c-a+1}(1-u)^{b-c}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{a-1} du$$

schreiben, dann die hierin vorkommenden bestimmten Integrale und zwar jenes von $y_1$ durch

$$\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(b)}{\Gamma(b-a+1)}\cdot F\left(c-a, 1-a, b-a+1, \frac{1}{x}\right)$$

und jenes in $y_2$ durch

$$\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(b-a+1)}\cdot F\left(1-a, c-a, b-a+1, \frac{1}{x}\right)$$

ausdrücken kann, dass also die Gleichung:

$$y_2 = \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(1-a)\Gamma(b)}\cdot y_1 \quad \ldots (75)$$

sich ergibt. Es stellt daher [83] nicht das vollständige, sondern nur ein particuläres Integral der Gleichung (55) dar, und auch die in Rede stehende Entdeckung ist illusorisch.

VIII. Findet ausser den Bedingungen für [83] auch noch die Gleichung $A+\mu=0$ statt, so ist, wie Spitzer S. 40 und 41 der „St." behauptet:

$$\begin{aligned} y = {} & C_1(x-\beta)^{B+\mu}\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^\mu(u-\beta)^{-B}(x-u)^{A-1} du \\ & + C_2(x-\beta)^{B+\mu}\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^\mu(u-\beta)^{-B}(x-u)^{A-1} log\frac{(x-\alpha)(u-\beta)}{(u-\alpha)(x-u)} du \end{aligned} \quad [84] \ldots$$

das vollständige Integral von [19]. Dies heisst also,

wenn:

$$1-a>0, b>0, c=1$$

so sind

$$y_1=(1-x)^{1-a-b}\int_0^1 u^{-a}(1-u)^{b-1}(x-u)^{a-1}\,du,$$

$$y_3=(1-x)^{1-a-b}\int_0^1 u^{-a}(1-u)^{b-1}(x-u)^{a-1}\log\frac{x(1-u)}{u(x-u)}\,du \quad \ldots (76)$$

zwei verschiedene particuläre Integrale von (55). Wieder eine falsche Behauptung! Denn aus (75) folgt:

$$\frac{y_2-y_1}{1-c}=\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(b)-\Gamma(c-a)\Gamma(b-c+1)}{c-1}\cdot\frac{y_1}{\Gamma(1-a)\Gamma(b)}$$

und wenn man $c$ in 1 übergehen lässt:

$$y_3=\left[\frac{\Gamma'(1-a)}{\Gamma(1-a)}-\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)}\right]\cdot y_1 \quad \ldots (77)$$

Die beiden Integrale in (76) stehen in einem constanten Verhältniss; [84] ist nicht das vollständige, sondern blos ein particuläres Integral. W. z. b. w.

IX. Auf Seite 41 der „St." wird nun eine Art Anwendung von den vorhergehenden „Sätzen" auf den Fall gemacht, in welchem

$$A+\mu=0 \text{ und } B+\mu=0$$

ist. Es wird da mit ebensoviel Scharfsinn als Behagen Folgendes docirt:

„Für die Gleichung

$$[85] \ldots (x-\alpha)(x-\beta)y''+(2x-\alpha-\beta)y'-\mu(\mu+1)y=0$$

gibt es folgendes Integrale:

$$[86] \ldots \quad y=C_1\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{-\mu-1}(u-\beta)^{-\mu-1}(x-u)_\mu\,du$$

$$+C_2\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{-\mu-1}(u-\beta)^{-\mu-1}(x-u)^\mu\log\frac{(x-\alpha)(u-\beta)}{(x-u)(u-\alpha)}\,du$$

für negative $\mu$, und folgendes andere Integrale:

$$[87] \dots \quad \begin{aligned} y = & C_1 \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^\mu (u-\beta)^\mu (x-u)^{-\mu-1} du \\ & + C_2 \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^\mu (u-\beta)^\mu (x-u)^{-\mu-1} \log \frac{(x-\alpha)(u-\beta)}{(x-u)(u-\alpha)} du \end{aligned}$$

für positive Werthe von $\mu + 1$."

Scheidet man zunächst wieder aus den mit $C_2$ multiplicirten Integralen die Theile aus, welche aus dem Product von *log* (— 1) und dem ersten Integral bestehen und führt dann die übliche Bezeichnungsweise mittelst der Gleichungen (57) ein, so besteht das Spitzer'sche Resultat darin, dass, wenn:

$$a + b = 1 \text{ und } c = 1$$

ist, der diesen Voraussetzungen entsprechenden Differentialgleichung (55), nämlich:

$$x(1-x)y'' + (1-2x)y' - a(1-a)y = 0 \quad \dots (78)$$

für $a > 0$ die Integrale:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \int_0^1 [u(1-u)]^{a-1}(x-u)^{-a} du, \\ y_3 &= \int_0^1 [u(1-u)]^{a-1}(x-u)^{-a} \log \frac{x(1-u)}{u(x-u)} du \end{aligned}\right\} \quad \dots (79)$$

dagegen für $a < 1$ die Integrale:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \int_0^1 [u(1-u)]^{-a}(x-u)^{a-1} du, \\ y_3 &= \int_0^1 [u(1-u)]^{-a}(x-u)^{a-1} \log \frac{x(1-u)}{u(x-u)} du \end{aligned}\right\} \quad \dots (80)$$

angehören. Abgesehen davon, dass die Gleichung [87] aus [86] folgt, wenn man in der letztern $\mu + 1$ für $-\mu$ setzt und also die Aufstellung von [87] unnöthig ist, genügt die Bedingung

$\mu < 0$ für [86] nur dann, wenn $x$ nicht zwischen $\alpha$ und $\beta$ liegt, was Spitzer aber wieder unbeachtet lässt. Sollen [86] und [87] für alle möglichen $x$ gelten, so hätte derselbe statt der Bedingungen: negative $\mu$, positive Werthe von $\mu + 1$ für beide Formeln gemeinsam die Bedingungen:

$$-\mu - 1 > -1, \mu > -1$$

aufstellen müssen, die sich übrigens auf die eine

$$-1 < \mu < 0$$

reduciren lassen. Als die entsprechende, richtige Bedingung für (79) und (80) folgt dann $0 < a < 1$.

Es ist jedoch nicht der Mühe werth, hierauf näher einzugehen, denn wieder findet der viel misslichere Umstand statt, dass zufolge der Gleichung (63) das zweite particuläre Integral $y_3$ identisch $= 0$ ist, also die Formeln [86] und [87] durch ihre trügerischen Constanten $C_1$ und $C_2$ wieder den unbegründeten Anspruch machen, das allgemeine Integral von [85] zu sein. Setzt man nämlich in [86] zur Abkürzung

$$y_1 = \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{-\mu-1}(u-\beta)^{-\mu-1}(x-u)^\mu \, du$$

so erscheint jene Gleichung [86] in der interessanten Gestalt:

$$y = C_1 y_1 + C_2 \log(-1) . y_1$$

Ebenso verhält es sich mit [87].

Dies sind also wieder einige der „Sätze", die Spitzer „werth schienen, veröffentlicht zu werden".

## 17.

X. Auf Seite 41 der „St." wird eine andere Anwendung gemacht; es ist daselbst Folgendes zu lesen:

„Sei

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \qquad \ldots (81)$$

die vorgelegte Gleichung. Für dieselbe ist für positive Werthe von $n+1$:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{(1-u^2)^n}{(x-u)^{n+1}} du + C_2 \int_{-1}^{+1} \frac{(1-u^2)^n}{(x-u)^{n+1}} \log \frac{(x-1)(u+1)}{(x-u)(u-1)} du \qquad \ldots (82)$$

und für negative $n$:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{(x-u)^n}{(1-u^2)^{n+1}} du + C_2 \int_{-1}^{+1} \frac{(x-u)^n}{(1-u^2)^{n+1}} \log \frac{(x-1)(u+1)}{(x-u)(u-1)} du \quad \ldots (83)$$

als Integrale obiger Gleichung. Meines Wissens wurde bisher nie das vollständige Integrale obiger so oft discutirten Gleichung auf diese Weise gegeben."

In der That ganz neu, aber wieder durchaus falsch. Die beiden willkürlichen Constanten sind nämlich pures Blendwerk; in jeder Gleichung stellt $y$ abermals nur ein einziges particuläres Integral dar.

Betrachtet man, um dies zu beweisen, zunächst die Formel (82) und setzt darin

$$u = 1 - 2v, \qquad x = 1 + 2\xi$$

so ist

$$1 - u^2 = 4v(1-v), \quad x - u = 2(\xi - v)$$

$$x - 1 = 2\xi, \qquad \frac{u+1}{u-1} = -\frac{1-v}{v}$$

und erhält man aus (82):

$$y = 2^n C_1 \int_0^1 \frac{[v(1-v)]^n}{(\xi - v)^{n+1}} dv$$

$$+ 2^n C_2 \int_0^1 \frac{[v(1-v)]^n}{(\xi - v)^{n+1}} \left[\log \frac{\xi(1-v)}{v(\xi - v)} + \log(-1)\right] dv$$

oder, wenn man $C_1$ für $2^n C_1 + 2^n C_2 \log(-1)$ und $C_2$ für $2^n C_2$, ferner $n + 1 = a$, endlich wieder $u$ für $v$ setzt:

$$y = C_1 \int_0^1 [u(1-u)]^{a-1} (\xi - u)^{-a} du$$

$$+ C_2 \int_0^1 [u(1-u)]^{a-1} (\xi - u)^{-a} \log \frac{\xi(1-u)}{u(\xi - u)} du, \qquad n + 1 = a > 0$$

Da aber nach (63) das letztere Integral $= 0$ ist, so reducirt sich $y$, dies ist das angebliche vollständige Integral

auf das erste Glied, nämlich auf das blos particuläre Integral

$$C_1 \int_0^1 [u(1-u)]^{a-1} (\xi - u)^{-a} du$$

Ganz dasselbe lässt sich auf dieselbe Art bei dem vermeintlich vollständigen Integral (83) für negative $n$ zeigen. Ich bemerke übrigens hierzu noch das Folgende. Herr Dr. B. Igel in Wien hat*) auf die Unrichtigkeit der Spitzer'schen Behauptung, die Gleichungen (82) und (83) seien vollständige Integrale von (81), aus einem wesentlich andern Grunde geschlossen, indem er von der ganz richtigen Bemerkung ausgieng, dass der Gleichung (81), als der Differentialgleichung der Kugelfunctionen, das allgemeine Integral

$$y = C_1 P^n(x) + C_2 Q^n(x)$$

(siehe Heine „Handbuch der Kugelfunctionen" S. 55) entspricht, aus welchem, wenn $n = 0$ gesetzt und berücksichtigt wird, dass $P^0(x) = 1$, $Q^0(x) = log \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ ist, für das vollständige Integral der dieser Annahme entsprechenden Gleichung:

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' = 0 \qquad \dots (84)$$

der Ausdruck

$$y = C_1 + C_2 \log \frac{x+1}{x-1} \qquad \dots (85)$$

erhalten wird, während aus der Spitzer'schen Formel (82) hierfür

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{du}{x-u} + C_2 \int_{-1}^{+1} \frac{du}{x-u} \log \frac{(x-1)(u+1)}{(x-u)(u-1)}$$

oder

$$y = C_1 \log \frac{x+1}{x-1} + C_2 \int_{-1}^{+1} \frac{du}{x-u} \log \frac{(x-1)(u+1)}{(x-u)(u-1)} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad \dots (86)$$

erhalten wird. Dr. Igel schliesst hieraus: „Da das erste (particuläre) Integral $Q^0(x)$ ist, so müsste das zweite eine Constante

*) In einer am 13. Juli 1876 der k. Akademie der Wissenschaften vorgelegten Abhandlung.

sein. Dass dies nicht der Fall ist, dass es vielmehr auch auf $log \frac{x+1}{x-1}$ führt, beweisen wir folgendermassen.*) Das (mit $C_2$ multiplicirte particuläre) Integral zerlegt sich in:

$$y_2 = log(x-1)\int_{-1}^{+1} \frac{du}{x-u} - \int_{-1}^{+1} \frac{log(x-u)}{x-u} du$$
$$+ \int_{-1}^{+1} \frac{du}{x-u} log \frac{u+1}{u-1} \quad \ldots (87)$$

Das erste ist $log\,(x-1)\,log \frac{x+1}{x-1}$, das zweite $-\frac{1}{2}\left[log \frac{x+1}{x-1}\right]^2$ u. s. w."

Dass hier — offenbar nur in Folge eines Versehens oder Druckfehlers — „das zweite" statt: „das erste und zweite" steht, die letztere Angabe aber wirklich gemeint ist, liegt auf der Hand und folgt daraus auf das Bestimmteste, dass Dr. Igel wenige Zeilen weiter schreibt:

„Wird der Kürze wegen das zweite Integral mit $y_2$ bezeichnet, so ist, wie bereits bemerkt wurde:

$$y_2 = -\frac{1}{2}\left[log \frac{x+1}{x-1}\right]^2 + \int_{-1}^{+1} \frac{du}{x-u} log \frac{u+1}{u-1} \quad \ldots (88)$$

also ..." Dabei ist nun doch wohl das erste Glied rechts das erste und zweite Theilintegral von $y_2$ in (87)! —

Aus jenem Druckfehler oder Versehen, das ohne Zweifel auch Spitzer als solches erkannt hat, wie aus einem andern, wo $\frac{1}{x}$ statt $x$ gedruckt ist, schlägt nun derselbe wieder Capital; er eröffnet hierüber die „Abfertigung" der Igel'schen Arbeit wie folgt: „da häuft sich in ununterbrochener Folge Unsinn auf Unsinn, Unwissenheit auf Unwissenheit."

*) Nämlich auf zwei Arten. Die erste ist blos angedeutet, beruht auf Reihenentwicklung und führt auf umständliche Rechnungen; die zweite, welche alsbald folgen wird, nimmt nur die Regeln der Integralrechnung in Anspruch und ist kurz.

Dass nun aber, ausser den beiden Druckfehlern oder Versehen, alles Uebrige jener Arbeit — für Spitzer nur zu richtig ist, wird der Leser aus dem zweiten Beweis des Dr. Igel ersehen, den ich vollständig hier folgen lasse.

„Aus (86) folgt:

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{2}{x^2-1} \log \frac{x-1}{x+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{du}{(x-u)^2} \log \frac{u+1}{u-1}$$

Durch theilweise Integration ergibt sich:

$$\int \frac{du}{(x-u)^2} \log \frac{u+1}{u-1} = \frac{1}{x-u} \log \frac{u+1}{u-1} - \int \frac{du}{x-u} \left( \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right)$$

$$= \frac{1}{x-u} \log \frac{u+1}{u-1} - \frac{1}{x+1} \log \frac{u+1}{x-u} + \frac{1}{x-1} \log \frac{u-1}{x-u}$$

wofür man offenbar auch:

$$-\frac{2}{x^2-1} \log (x-u) + \frac{u+1}{(x+1)(x-u)} \log (u+1)$$

$$- \frac{u-1}{(x-1)(x-u)} \log (u-1)$$

schreiben hann. Es ist daher:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du}{(x-u)^2} \log \frac{u+1}{u-1} = -\frac{2}{x^2-1} \log \frac{x-1}{x+1} - \frac{2 \log (-1)}{x^2-1}$$

folglich:

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{2 \log (-1)}{x^2-1}$$

woraus für $y_2$, abgesehen von einem constanten Factor, wieder $\log \frac{x+1}{x-1}$ sich ergibt."

Hierüber sagt Spitzer S. 153 des „Anh." Folgendes:

„Herr Igel bezeichnet das zweite particuläre Integral mit $y_2$ und beweist sodann, dass

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{2 \log (-1)}{x^2-1}$$

ist, hieraus folgert er:

$$y_2 = C \log \frac{x+1}{x-1} \qquad \ldots (89)$$

was aber falsch ist, weil aus obiger Gleichung

$$y_2 = C_1 + C_2 \log \frac{x+1}{x-1}$$

folgt. Es wird aber durch dies nicht das bewiesen, was Igel beweisen wollte, sondern gerade das Entgegengesetzte."

Hiemit bricht Spitzer plötzlich ab; er bleibt den Beweis dafür, dass hieraus „gerade das Entgegengesetzte" folge, wie gewohnt, wieder schuldig, lässt aus guten Gründen die Frage bei dem entscheidenden Punct im Stich und thut so, als wenn nun Alles schon im Reinen wäre. Ich werde jetzt das Fehlende beibringen.

Es ist erstens nicht wahr, dass aus $\frac{dy_2}{dx}$ für $y_2$ ein Ausdruck (89) mit einer willkürlichen Constante $C$ folgt oder gefolgert wurde, sondern man erhält:

$$y_2 = -\log(-1) \log \frac{x+1}{x-1} \qquad \ldots (90)$$

Zweitens ist es nicht wahr, dass

$$y_2 = C_1 + C_2 \log \frac{x+1}{x-1}$$

zu setzen, nämlich noch eine Constante $C_1$ beizufügen sei, einmal weil $y_2$ als particuläres Integral nicht zwei willkürliche Constante enthalten kann, und dann, weil vermöge der Definition:

$$y_2 = -\frac{1}{2}\left[\log \frac{x+1}{x-1}\right]^2 + \int_{-1}^{+1} \frac{du}{x-u} \log \frac{u+1}{u-1} = C_1 + C_2 \log \frac{x+1}{x-1}$$

sein müsste, woraus für $x = \infty$ sofort $C_1 = 0$ folgt.

Dies ist abermals ein Beleg dafür, dass Spitzer selbst in den einfachsten Fällen sich bei der Constantenbestimmung nicht zu benehmen weiss.

Es ist also, wie angegeben:

$$y_2 = -\log(-1) \,.\, \log \frac{x+1}{x-1}$$

und, wie Dr. Igel behauptet, $y_2$ keine constante Grösse, sondern eine Function von $x$, nämlich, abgesehen von dem constanten

Factor, wieder $log\,\frac{x+1}{x-1}$. Die von Spitzer für das allgemeine Integral der Gleichung (84) ausgegebene Formel (86), d. h. der Ausdruck:

$$y = C_1\,log\,\frac{x+1}{x-1} - C_2\,log\,(-1)\,.\,log\,\frac{x+1}{x-1} = C\,log\,\frac{x+1}{x-1}$$

stellt also nur ein particuläres Integral jener Gleichung dar, woraus abermals sich ergibt, dass sowohl der „Satz", als alle sonstigen Behauptungen Spitzer's grundfalsch sind.

Diese Auseinandersetzung habe ich, ohne Vorwissen des Dr. Igel, aus dem Grunde hier folgen lassen, weil Spitzer bei dieser Gelegenheit auch einen Angriff auf die k. Akademie der Wissenschaften zu unternehmen für angezeigt erachtet hat. Er schreibt im „Anh.": „So was nennt Igel einen Beweis, und solche Beweise hält die k. Akademie der Wissenschaften für werth, in ihren Druckschriften publicirt zu werden . . . Ich kann nicht umhin, mein Erstaunen über die Leichtfertigkeit auszudrücken, mit welcher ein Machwerk, das keine gelehrte Gesellschaft der Welt in ihren Schriften abgedruckt hätte, in denen der k. Akademie der Wissenschaften in Wien willige Aufnahme gefunden hat."

Diese tugendhafte Entrüstung wäre ganz am rechten Platz, wenn die k. Akademie einen oder mehrere der soeben in der Enthüllung begriffenen Sätze Spitzer's in die akadem. Schriften aufgenommen hätte. Da aber dies nicht geschah, sondern die Akademie vielmehr dem Aufsatz Dr. Igel's Raum gegeben, der einen jener Sätze als falsch aufgedeckt hat, so war es gar nicht klug, dass Spitzer gerade bei dieser Gelegenheit sein dem Leser bekanntes, in Hinsicht der Gründung „geistigen Eigenthums" so lucratives Schweigen verlassen hat.

## 18.

Hatte einmal die Forschung auf der Oberfläche eine so reiche Ausbeute an Entdeckungen ergeben, so lässt es sich begreifen, dass Spitzer auch mehr in die Tiefe zielende Speculationen daran zu knüpfen suchte. Schon auf Seite 42 der „St." (3. Abschn.) findet man ein Resultat, welches, auf das „voll-

ständige" Integral [78] der Gleichung [19] gestützt, solche Absichten verräth und Folgendes besagt:

XI. „Vorausgesetzt, dass sowohl $A > 0$ als auch $B > 0$ und dass $A + \mu = - m$ ist, woselbst $m$ eine ganze positive Zahl bezeichnet, ist:

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} \cdot \frac{d^m . (x - u)^{m+\mu}}{dx^m} . du +$$

[89] . . .

$$C_2 \int_\alpha^\beta (u - \alpha)^{A-1} (u - \beta)^{B-1} \cdot \frac{d^m}{dx^m} \left[ (x - u)^{m+\mu} log \frac{(x - \alpha)(u - \beta)}{(x - u)(u - \alpha)} \right] du$$

das Integral der Gleichung [19]."

Noch tiefer dringen aber die Folgerungen, welche Spitzer hinwieder aus diesem Resultate ableitet. Er schreibt S. 43 wörtlich Folgendes:

„Hieraus ersieht man, dass im Integrale der Gleichung [19] ein Logarithmus auftritt, nicht nur, wenn $A + \mu$ oder $B + \mu$ gleich Null ist, sondern auch dann, wenn $A + \mu$ oder $B + \mu$ irgend eine ganze negative Zahl bezeichnet. Ja selbst in dem Falle, wo $A + \mu$ oder $B + \mu$ eine ganze positive Zahl ist, erscheint im Integrale der Gleichung [19] ein logarithmischer Bestandtheil. Denn . . ."

Zwar wird manchem Leser diese neue Thesis schon aus dem Grunde nicht ganz geheuer vorkommen, weil die Bedingungen des „Satzes" [76] sich doch ganz vortrefflich damit vertragen, dass $A + \mu$ und $B + \mu$ positive oder negative ganze Zahlen sind, dennoch aber in den Integralen [76] kein „logarithmischer Bestandtheil" erscheint. Indessen braucht man sich bei diesem Zweifel nicht lange aufzuhalten, denn der soeben vernommene Ausspruch Spitzer's ist eine Folgerung, die von selbst in sich zerfällt, sobald ihr Fundament, das vermeintlich allgemeine Integral [89] zusammenbricht.

Zunächst scheide man, wie in früheren Fällen, aus dem zweiten bestimmten Integral in [89] ein dem ersten gleiches, versehen mit dem Factor $log(-1)$ aus, wodurch $C_1 + C_2 log(-1)$ an die Stelle von $C_1$ tritt, ersetze hierauf wieder mittelst der

Gleichungen (57) die weitschweifige Schreibweise Spitzer's durch die allgemein gebräuchliche, und berücksichtige dabei die Bedingung $m = -A - \mu$; dann gelangt man, wenn, wie $m$, auch $c$ als eine positive ganze Zahl vorausgesetzt wird, zu den beiden Integralen

$$y_1 = \int_0^1 u^{a-c}(1-u)^{c-b-1} \cdot \frac{d^{c-1} \cdot (x-u)^{c-a-1}}{dx^{c-1}} du,$$

$$y_3 = \int_0^1 u^{a-c}(1-u)^{c-b-1} \cdot \frac{d^{c-1}}{dx^{c-1}}\left[(x-u)^{c-a-1} \log \frac{x(1-u)}{u(x-u)}\right] du$$

welche, damit [89] wirklich ein completes Integral sei, nicht in einem von $x$ unabhängigen Verhältnisse stehen dürfen.

Setzt man nun der Kürze wegen

$$y_1 = \frac{d^{c-1} z_1}{dx^{c-1}}, \quad y_3 = \frac{d^{c-1} z_3}{dx^{c-1}}$$

also:

$$z_1 = \int_0^1 u^{a-c}(1-u)^{c-b-1}(x-u)^{c-a-1} du,$$

$$z_3 = \int_0^1 u^{a-c}(1-u)^{c-b-1}(x-u)^{c-a-1} \log \frac{x(1-u)}{u(x-u)} du$$

so sind $z_1$ und $z_3$ zwei (gleiche oder verschiedene) Lösungen einer hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$x(1-x) \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} + [c_1 - (a_1 + b_1 + 1)x]\frac{dz}{dx} - a_1 b_1 z = 0,$$

welcher bekanntlich das Integral

$$z_1 = \int_0^1 u^{a_1-c_1}(1-u)^{c_1-b_1-1}(x-u)^{-a_1} du$$

entspricht. Es ist daher

$$a_1 - c_1 = a - c\,, \quad c_1 - b_1 = c - b\,, \quad -a_1 = c - a - 1$$

also $$a_1 = a - c + 1\,, \quad b_1 = b - c + 1, \quad c_1 = 1$$

und sofort auch

$$z_3 = \int_0^1 u^{a_1 - c_1}(1-u)^{c_1 - b_1 - 1}(x-u)^{-a_1} \log \frac{x(1-u)}{u(x-u)} du$$

Da $c_1 = 1$ ist, so befinden sich die beiden Integrale $z_1$ und $z_3$ genau in dem Fall der früher im Art. 14 betrachteten Integrale (61), zwischen welchen (für $c = 1$) die Relation (62) stattfindet. Es besteht daher ganz ebenso für $c_1 = 1$ auch hier die Relation:

$$z_3 = \left[\frac{\Gamma'(1-b_1)}{\Gamma(1-b_1)} - \frac{\Gamma'(a_1)}{\Gamma(a_1)}\right] \cdot z_1$$

aus welcher, wenn man $c-1$mal nach $x$ differentiirt, und für $a_1$, $b_1$ ihre Werthe setzt, die Gleichung:

$$y_3 = \left[\frac{\Gamma'(c-b)}{\Gamma(c-b)} - \frac{\Gamma'(a-c+1)}{\Gamma(a-c+1)}\right] \cdot y_1$$

sich ergibt. Die Gleichung [89] stellt also trotz ihrer grössern Schwülstigkeit wieder nur ein einziges particuläres Integral von [19] dar und die oben angeführte, wichtigthuende Enunciation fällt mit jener Gleichung als leeres Gerede in sich selbst zusammen.

XII. S. 43 der „St." (3. Abschn.) wird der Satz in XI durch ein Beispiel illustrirt. Spitzer lehrt:

„Ist $A + \mu = 1$, $B + \mu = 1$, so hat man die Gleichung:

$$(x-\alpha)(x-\beta)y'' + \mu(1-\mu)y = 0$$

und deren Integral:

$$y = C_1(x-\alpha)\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{-\mu-1}(u-\beta)^{1-\mu}(x-u)^{\mu-1} du$$

$$+ C_2(x-\alpha)\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{-\mu-1}(u-\beta)^{1-\mu} \frac{d}{dx}\left[(x-u)^\mu \log \frac{(x-\alpha)(u-\beta)}{(x-u)(u-\alpha)}\right] du$$

und dies ist richtig für negative Werthe von $\mu$."

In der üblichen Ausdrucksweise heisst dies:

Ist $c = 0$ , $a + b + 1 = 0$, so findet die Gleichung statt:

$$x(1-x)y'' + a(1+a)y = 0$$

und ist deren Integral:

$$y = C_1 x \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{a+1} D_x (x-u)^{-a}\, du$$

$$a > 0$$

$$+ C_2 x \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{a+1} D_x \left[(x-u)^{-a} \log \frac{x(u-1)}{u(x-u)}\right] du$$

Hat man nun die Gleichung:

$$x(1-x)z'' + [c_1 - (a_1 + b_1 + 1)x]z' - a_1 b_1 z = 0$$

so ist

$$z_1 = \int_0^1 u^{a_1-c_1}(1-u)^{c_1-b_1-1}(x-u)^{-a_1}\, du$$

ein Integral dieser Gleichung und steht, wenn $c_1 = 1$ ist, mit diesem, nach (62) das Integral:

$$z_2 = \int_0^1 u^{a_1-c_1}(1-u)^{c_1-b_1-1}(x-u)^{-a_1} \log \frac{x(1-u)}{u(x-u)} \cdot du$$

in der Relation:

$$z_2 = \left[\frac{\Gamma'(1-b_1)}{\Gamma(1-b_1)} - \frac{\Gamma'(a_1)}{\Gamma(a_1)}\right] \cdot z_1$$

Setzt man jetzt:

$$a_1 - c_1 = a - 1, \; c_1 - b_1 - 1 = a + 1, \; a_1 = a,$$

so folgt

$$a_1 = a \;,\; b_1 = -a - 1 \;,\; c_1 = 1$$

und

$$z_1 = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{a+1}(x-u)^{-a}\, du$$

$$z_2 = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{a+1}(x-u)^{-a} \log \frac{x(1-u)}{u(x-u)}\, du,$$

ferner:

$$z_2 = \left[\frac{\Gamma'(a+2)}{\Gamma(a+2)} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\right] \cdot z_1 = k z_1$$

Da nun

$$y = C_1 x \cdot \frac{dz_1}{dx} + C_2 x \cdot \frac{dz_2}{dx}$$

ist, so hat man:

$$y = x(C_1 + k C_2) \frac{dz_1}{dx}$$

und ergibt sich, dass das Integral, welches Spitzer für das allgemeine ausgegeben hat, nur ein particuläres der in Rede stehenden Differentialgleichung ist.

Auf gleiche Art lässt sich zeigen, dass auch die Behauptung (S. 44 der „St."), „im Integral treten, so oft $A + B$ Null oder eine ganze Zahl ist, Logarithmen auf", falsch ist. Spitzer schliesst mit den Worten: „Durch eine zweckmässige Anwendung der im Bisherigen gegebenen Sätze lässt sich das vollständige Integrale der Gleichung [19] in allen Fällen angeben." Dieser Schluss krönt das Werk! —

Vor dergleichen Entdeckungen, die Spitzer's echtes geistiges Eigenthum sind und welche in Schutz zu nehmen derselbe der k. Akademie der Wissenschaften zumuthet, möge nun ein Jeder, sei es in der Lectüre, sei es im Unterricht, sich ebenso sorgfältig bewahren, wie vor der Logik, die zu solchen Producten des höhern Tiefsinns führt.

## 19.

Sowohl aus dem ersten als zweiten Capitel der vorliegenden Schrift, an deren Ende ich nun angelangt bin, geht hervor, dass — abgesehen von blos literarischen Nachweisungen — alle entscheidenden Hauptpuncte im engsten Zusammenhang mit der Theorie der bestimmten Integrale stehen, und dass Spitzer, als er den Feldzug eröffnete, das Gebiet dieser Theorie, ich weiss nicht ob bewusst oder unbewusst, betreten hat und unvermeidlich betreten musste. War es mir nun wohl bekannt, dass Spitzer auf diesem Gebiete noch nie etwas der Rede Werthes geleistet, so hätte ich doch nicht vermuthet, dass er sogar in den Elementen jenes Theiles der Integralrechnung eine so klägliche Unkenntniss an den Tag legen würde, wie dies im „Anhang" geschehen ist. Mit einiger Selbsterkenntniss und etwas weniger — Finessen hätte er sich übrigens der Gefahr, derartige

Proben öffentlich abzulegen, noch zuletzt, wenigstens theilweise entziehen, und, wenn nicht aus meinen drei Abhandlungen, so doch aus meiner ersten gegen ihn veröffentlichten Schrift, seinen Standpunct sich klar machen und seiner Sache die Nativität stellen können.

Spitzer jedoch verschloss sich dieser wie jeder Einsicht; er glaubte mit einer „Abfertigung", mit neuen Invectiven, mit neuen wahrheitswidrigen Behauptungen und dadurch, dass er vor jeder nur halbwegs genügenden Erörterung, vor allen seinen pompös angekündigten „Beweisen" kühn die Flucht ergriff, die Sache, oder, wie er sich im „Anh." auszudrücken beliebt, „diesen Gegenstand" abthun zu können.

Den Erfolg dieser „Methode", welcher zunächst in dem Erscheinen der vorliegenden Schrift besteht, hat Spitzer lediglich sich selbst zuzuschreiben.

---

## Berichtigungen.

S. 14, Z. 16 v. u. lies: „Spitzer Euler'n" statt: „ihm Spitzer".
„ 21, „ 18 v. o. „ „eins" statt: „eines".
„ 30, „ 2 v. u. „ $\int_0^\infty$ „ $\int^\infty$
„ 34, „ 11 v. u. „ $(c-u)$ „ $(c \quad u)$.
„ 47, „ 6 v. u. „ $(n-1)$ „ $(n- \;)$.
„ 49, „ 10 v. o. „ $C_2 \rho e^{\rho u \xi} + C_3 \rho^2 e^{\rho^2 u \xi}$
„ 80, „ 1 v. o. „ $C_1$ statt: $C_2$
„ 80, „ 6 v. u. „ $x > 1$ oder $x < 0$.

K. k. Hofbuchdruckerei Carl Fromme in Wien.



K. K. HOFBUCHDRUCKEREI CARL FROMME IN WIEN.